ColloQUIUM
Editorial - Centro de Formación

Análisis Matemático Aplicado a la Administración de Empresas utilizando Software Libre

José Luis Estrada Pantia
Efraín Rodas Guizado
Orlando Olivares Rivera
Frida Esmeralda Fuentes Bernedo
Percy Salguero Huayllas



José Luis Estrada Pantia
Universidad Nacional José María Arguedas
https://orcid.org/0000-0002-6138-9043
jestrada@unajma.edu.pe
Físico – Matemático, Maestro en Educación, Doctorando en educación, actualmente docente universitario ordinario asociado desde el 2008, adscrito al Departamento Académico de Ciencias Básica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional José María Arguedas Andahuaylas - Perú.



Efraín Rodas Guizado
Universidad Nacional José María Arguedas
https://orcid.org/0000-0002-8862-3151
erodas@unajma.edu.pe
Matemático mención Estadística, Maestro en Estadística e Investigación Científica. Actualmente cursando el doctorado en ciencias de la Educación. Docente adscrito al Departamento Académico de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional José María Arguedas Andahuaylas – Perú.



Orlando Olivares Rivera
Universidad Nacional José María Arguedas
https://orcid.org/0000-0001-9476-1211
oolivares@unajma.edu.pe
Licenciado en Matemáticas, Maestro en Estadística e Investigación Científica, actualmente cursando el doctorado en Ciencias de la Educación, en la Universidad Andina de Cusco. Docente adscrito al Departamento Académico de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional José María Arguedas de Andahuaylas – Perú.



Frida Esmeralda Fuentes Bernedo
Universidad Nacional José María Arguedas
https://orcid.org/0000-0002-8731-4621
ffuentes@unajma.edu.pe
Licenciada en Matemáticas, Maestro en Docencia Universitaria y Gestión Educativa. Doctorante en Educación. Docente adscrito al Departamento Académico de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional José María Arguedas de Andahuaylas – Perú.



Percy Salguero Huayllas
Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco
https://orcid.org/0000-0002-0570-7748
percy.salguero@unsaac.edu.pe
Licenciado en Matemática, Maestro en Matemática de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Doctor en Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Bachiller en Ingeniería Civil de la Universidad Alas Peruanas. Docente ordinario en la UNSAAC desde el 2010 y en diferentes universidades del Perú.

Análisis Matemático Aplicado a la Administración de Empresas utilizando Software Libre

José Luis Estrada Pantia
Efraín Rodas Guizado
Orlando Olivares Rivera
Frida Esmeralda Fuentes Bernedo
Percy Salguero Huayllas

ColloQUIUM
Editorial - Centro de Formación

Análisis Matemático Aplicado a la
Administración de Empresas
utilizando Software Libre

José Luis Estrada Pantia
Efraín Rodas Guizado
Orlando Olivares Rivera
Frida Esmeralda Fuentes Bernedo
Percy Salguero Huayllas

Edited by Colloquium
ISBN: 978-9942-600-14-1
First edition 2021
https://doi.org/10.31876/90

The book was reviewed by academic peers before its editorial process, in case you require certification you should request it to: sbores@colloquium-editorial.com.

The production or storage of all or part of this publication, including the cover design, as well as its transmission by any means, whether electronic, chemical, mechanical, optical, recording or photocopying, without the authorization of the copyright holders, is strictly prohibited under the penalties of the law.

Ecuador 2021

ÍNDICE GENERAL

INDICE DE TABLAS ____ PÁGINA XI

INDICE DE FIGURAS ____ PÁGINA XIII

1 LÍMITES ____ PÁGINA 1

1.1 Propiedades de límites 1
1.2 Continuidad 9
1.3 Pendiente de una curva 12
1.4 Razón de cambio 18
1.5 Aplicaciones 21

2 FUNCIONES ESPECIALES ____ PÁGINA 33

2.1 Funciones exponenciales 33
2.2 Funciones logarítmicas 37

3 DERIVADAS ____ PÁGINA 43

3.1 Reglas de derivación 45
3.2 Ejemplos 46
3.3 Derivadas de orden superior 52
3.4 Criterios de derivación 54
Función creciente y decreciente 54 • Concavidad y punto de inflexión 55 • Criterio de la primera derivada 56 • Criterio de la segunda derivada 57
3.5 Aplicaciones 68

4 LA INTEGRAL INDEFINIDA PÁGINA 83

4.1 Función primitiva o anti derivada 83

4.2 Linealidad de la integral indefinida 83

4.3 Fórmulas de integración 84

4.4 Algunos métodos de integración 87

Método de integración por sustitución 88 • Método de integración por descomposición en fracciones parciales 89 • Método de integración por partes 91 • Método de integración por sustitución trigonométrica 93

4.5 Aplicaciones de la integral indefinida a las leyes de crecimiento y decrecimiento 97

4.6 Función marginal 98

4.7 Interés continuo 100

5 LA INTEGRAL DEFINIDA PÁGINA 103

5.1 Teorema fundamental del cálculo 104

5.2 Propiedades 105

5.3 Aplicación al crecimiento poblacional 105

5.4 Aplicación a la confiabilidad de productos 107

5.5 Aplicación a las ganancias netas 110

5.6 Aplicación sobre el excedente total 111

5.7 Aplicación del coeficiente de desigualdad para distribuciones de ingreso 115

5.8 Aplicación sobre la curva de aprendizaje 118

5.9 Aplicación sobre maximización de la utilidad 121

BIBLIOGRAFÍA PÁGINA 125

125

Índice de tablas

3.1 Notaciones de derivadas de orden superior 53
3.2 Resultados finales Efecto del impuesto en la producción 81

4.1 Integrales inmediatas para **x** y **f(x)**, primera parte 84
4.2 Integrales inmediatas para **x** y **f(x)**, segunda parte 85

Índice de figuras

1.1 Página web del software GeoGebra . . . 3
1.2 Interface del software GeoGebra . . . 3
1.3 Representación del límite de una función gráficamente . . . 4
1.4 Ayuda de comandos de GeoGebra . . . 5
1.5 Límite de una función en GeoGebra . . . 5
1.6 Ingreso de la función en GeoGebra . . . 6
1.7 Resultado de límite en GeoGebra . . . 6
1.8 Página web wxMaxima . . . 6
1.9 Interface de wxMaxima . . . 7
1.10 Menú límite en wxMaxima . . . 8
1.11 Ingreso de la función en wxMaxima . . . 8
1.12 Resultado del límite de la función en wxMaxima . . . 8
1.13 Funciones continuas de ejemplo 01 . . . 9
1.14 Funciones continuas de ejemplo 02 . . . 9
1.15 Funciones continuas de ejemplo 03 . . . 9
1.16 Funciones continuas de ejemplo 04 . . . 9
1.17 Función discontinua $y = x^2$ . . . 10
1.18 Función discontinua por tramos $y = x,\ \ y = x+1$ . . . 10
1.19 Función discontinua por tramos en GeoGebra . . . 11
1.20 Pendiente de una curva . . . 12
1.21 Tangentes de una función en GeoGebra . . . 12
1.22 Calculo de la pendiente en wxMaxima . . . 14
1.23 Resultado pendiente en wxMaxima . . . 14
1.24 Ingreso de función en Graph . . . 15
1.25 Ingreso de función en Graph (menú) . . . 15

1.26 Resultado de función en Graph . . . 16
1.27 Ingreso de tangente en Graph (menú) . . . 16
1.28 Ingreso de tangente en Graph . . . 17
1.29 Resultado de tangente en Graph . . . 17
1.30 Incrementos de la función $y = f(x)$ . . . 19
1.31 Solución gráfica de incrementos mediante el programa GeoGebra . . . 20
1.32 Sub menús utilizados del programa GeoGebra . . . 21
1.33 Interface del programa Sage . . . 21
1.34 Resultado de límite en Sage . . . 22
1.35 Resultado de límite en Sage . . . 22
1.36 Análisis - función continua 1^{ra} condición . . . 23
1.37 Análisis - función continua 2^{da} condición . . . 23
1.38 Análisis - función continua menú gráfico . . . 24
1.39 Análisis - función continua gráfico . . . 24
1.40 Análisis - función continua 1^{ra} condición . . . 25
1.41 Análisis - función continua 2^{da} condición . . . 25
1.42 Análisis - función continua gráfica . . . 26
1.43 Proceso de solución tangentes primer ejemplo . . . 27
1.44 Proceso de solución tangentes segundo ejemplo . . . 28
1.45 Proceso de solución tangentes tercer ejemplo . . . 29
1.46 Proceso de solución tangentes cuarto ejemplo . . . 30
1.47 Proceso desarrollo de ejemplo tasa de crecimiento en wxMaxima . . . 31
1.48 Resultados tasa de crecimiento **b)**, **c)** y **d)** . . . 32

2.1 Función exponencial con variación de base en el programa GeoGebra . . . 34
2.2 Resultado proceso de crecimiento exponencial: población . . . 36
2.3 Gráfica proceso de crecimiento exponencial: población . . . 37
2.4 Función logaritmo con variación de base en el programa GeoGebra . . . 38
2.5 Herramienta deslizador en GeoGebra . . . 38
2.6 Menú de opciones de la herramienta deslizador en GeoGebra . . . 39
2.7 Resultado herramienta deslizador en GeoGebra . . . 39
2.8 Ingreso de la función logaritmo en GeoGebra . . . 39
2.9 Resultado ejemplo administración del bienestar en Sage . . . 40

3.1 Derivada de una función . . . 44
3.2 Derivada de una función . . . 44
3.3 Derivada de una función en wxMaxima . . . 46
3.4 Derivada de una función en wxMaxima . . . 47
3.5 Derivada de una función en wxMaxima . . . 47
3.6 Derivada de una función en wxMaxima . . . 48
3.7 Gráfica de una función en Sage . . . 49
3.8 Derivada de una función en Sage . . . 49
3.9 Gráfica de una función en Sage . . . 50
3.10 Derivada de una función en Sage . . . 50
3.11 Gráfica de una función en Sage . . . 51
3.12 Derivada de una función en Sage . . . 51
3.13 Gráfica de una función en Sage . . . 52
3.14 Derivada de una función en Sage . . . 52
3.15 Derivadas de grado 1-5 de: $\mathbf{y = e^{2x}}$ . . . 53
3.16 Funciones creciente y decreciente . . . 55
3.17 Concavidad de una función . . . 55
3.18 Punto de inflexión . . . 56
3.19 Puntos críticos . . . 57
3.20 Extremos relativos . . . 58
3.21 Representación de una caja vacía según el enunciado . . . 58
3.22 Ingreso de función - GeoGebra . . . 58
3.23 Resultado de Derivada de una función - GeoGebra . . . 59
3.24 Puntos críticos en wxMaxima . . . 59
3.25 Gráfica de la función derivada en GeoGebra . . . 60
3.26 Proceso de creación del ingreso y utilidad . . . 61
3.27 Derivando el ingreso . . . 61
3.28 Derivando la utilidad . . . 61
3.29 Primera derivada del ingreso . . . 62
3.30 Primera derivada de la utilidad . . . 62
3.31 Resultados de puntos críticos para el ingreso . . . 62
3.32 Resultados de puntos críticos para la utilidad . . . 62
3.33 Maximización del ingreso . . . 63

3.34 Maximización de la utilidad . . . 63
3.35 Ingreso de la función $Q(t)$ en GeoGebra . . . 64
3.36 Derivada de la función $Q(t)$ en GeoGebra . . . 65
3.37 Respuesta tasa de producción del trabajador a las 9:00 a.m. . . . 65
3.38 Derivada de la función tasa de cambio en GeoGebra . . . 66
3.39 Resultado de la función razón de cambio de la tasa de cambio en GeoGebra . . . 66
3.40 Resultado del cambio real en la tasa de producción del trabajador en GeoGebra . . . 67
3.41 Resultado eficiencia máxima del trabajador en GeoGebra . . . 67
3.42 Resultado eficiencia mínima del trabajador en GeoGebra . . . 68
3.43 Derivada de la función utilidad . . . 69
3.44 Maximización de A dólares por publicidad . . . 69
3.45 Menú resolver en wxMaxima . . . 70
3.46 Comando float en wxMaxima . . . 70
3.47 Resultado de la utilidad máxima . . . 70
3.48 Resultado minimización de pérdidas . . . 71
3.49 Resultados numéricos minimización de pérdidas . . . 72
3.50 Resultados numéricos minimización de pérdidas . . . 72
3.51 minimización de costo de una cisterna . . . 73
3.52 Resultado Derivada función costo . . . 74
3.53 Resultado Derivada función costo real . . . 74
3.54 Calculo de valores - minimización costo . . . 75
3.55 Resultados minimización de costo a) . . . 75
3.56 Resultados minimización de costo b) . . . 75
3.57 Resultado maximización de la utilidad . . . 77
3.58 Resultado utilidad máxima . . . 77
3.59 Maximización mediante el programa GeoGebra . . . 78
3.60 Soluciones de la función $f(x)$ . . . 79
3.61 Soluciones en X de la función $f(x)$ . . . 79
3.62 Resultado utilidad máxima . . . 80
3.63 Resultado utilidad máxima con impuesto . . . 81

4.1 Menú integrar en wxMaxima . . . 86
4.2 Integrar con wxMaxima . . . 86

4.3 Resultado integración con wxMaxima . . . 86
4.4 Ventana integrar en wxMaxima . . . 87
4.5 Resultado integración en xMaxima . . . 87
4.6 Ventana integrar en wxMaxima . . . 89
4.7 Resultado integración en wxMaxima . . . 89
4.8 Ventana integrar en wxMaxima . . . 90
4.9 Resultado integración en wxMaxima . . . 90
4.10 Ventana integrar en wxMaxima . . . 93
4.11 Resultado integración en wxMaxima . . . 93
4.12 Ventana integrar en wxMaxima . . . 95
4.13 Resultado integración en wxMaxima . . . 95
4.14 Solución Ley de crecimiento y decrecimiento . . . 97
4.15 Desarrollo - ejemplo de crecimiento poblacional . . . 98
4.16 Proceso para la determinación del costo . . . 99
4.17 Proceso para la determinación del costo . . . 100
4.18 Función general en un tiempo t de capitalización continua . . . 101
4.19 Función general en un tiempo t de capitalización continua . . . 102
4.20 Ejemplo Inversión de capital . . . 102

5.1 La integral definida . . . 104
5.2 Fuente: Publicación FAO 2002 . . . 106
5.3 Crecimiento poblacional durante 4 meses . . . 107
5.4 Solución parte a) . . . 108
5.5 Solución parte b) . . . 109
5.6 Solución parte c) . . . 109
5.7 Ganancias netas - Resultado GeoGebra . . . 111
5.8 Curva de oferta y demanda . . . 112
5.9 Beneficio del consumidor por Δq unidades . . . 112
5.10 Excedente de los consumidores . . . 112
5.11 Excedente de los productores . . . 112
5.12 Curvas de Oferta y Demanda . . . 113
5.13 Punto de equilibrio de la oferta y demanda . . . 113
5.14 Punto de equilibrio de la oferta y demanda . . . 114

5.15 Excedente del consumidor . . . 114
5.16 Excedente del productor . . . 115
5.17 Resultado final . . . 115
5.18 Curva de Lorentz . . . 116
5.19 Resultado parte a) . . . 117
5.20 Resultado parte b) . . . 117
5.21 Menú integración definida . . . 117
5.22 Conversión expresión fraccionaria a real . . . 117
5.23 Función de Lorentz - ejemplo . . . 118
5.24 Curva de aprendizaje . . . 119
5.25 Resultado de la integral de la curva de aprendizaje . . . 120
5.26 Proceso de selección para la integración . . . 120
5.27 Opciones de integración . . . 121
5.28 Obciones para la representación gráfica . . . 121
5.29 Curva de aprendizaje . . . 121
5.30 Curva de aprendizaje y área en GeoGebra . . . 121
5.31 Maximización de la utilidad . . . 123
5.32 Integración definida . . . 123
5.33 Utilidad máxima . . . 123

PRESENTACIÓN

Las TIC (Tecnologías de Información y Comunicación) en la actualidad se ha convertido en una herramienta muy importante en muchos campos es así que en el campo de la educación tenemos a nuestro alcance muchas herramientas, y en particular haremos referencia a éstas herramientas que son los software libre para matemática, los cuales se utilizarán algunas de estas para el presente libro.

En el presente libro veremos que haciendo uso de la tecnología y en particular de estos software matemáticos los procesos de obtención de resultados se hacen con rapidez. Es así que la particularidad de la presente publicación es enlazar la tecnología con la matemática y lograr que el estudiante tenga un acercamiento amigable hacia las matemáticas y no alejándolo o conseguir el temor o rechazo a las matemáticas mucho más aún cuando se consideran abstractas.

La presente publicación consta de cuatro capítulos en los cuales se brinda los conceptos necesarios así como el desarrollo de problemas y aplicaciones a la Administración de Empresas, haciendo el uso de software libre, los programas matemáticos libres que se pueden utilizar de acuerdo al problema u objetivo son **OCTAVE, QTOCTAVE, FREEMAT, MAXIMA, WXMAXIMA, SAGE, GEOGEBRA, WIRIS, WINPLOT, WINFUN, GRAPH, R**, entre otros más que se puede considerar, de los cuales se hace referencia sólo algunos de los mencionados, en el desarrollo se hace mención y se muestra los procedimientos mediante capturas de imágenes en los desarrollos de problemas.

Por otro lado cabe indicar que la presente publicación tiene como objetivo de incentivar a toda la juventud estudiosa a conocer la matemática, y por ende a buscar su superación en lo académico, también el deseo de aceptar la Matemática y, en particular, del conocimiento del Análisis Matemático o cálculo que es una rama de la matemática, y que siendo aplicada, muestra la interacción de la Matemática con las TIC.

José Luis Estrada Pantia
Docente UNAJMA

1 Límites

La noción de límite está dado por la tendencia de de valores de una función f(x) los cuales se aproximan ubicándose estos, muy cercanos ya sea por la derecha o por la izquierda a un valor **L**, cuando se considera valores para x sólo se acercan o aproximan no toma el valor de un punto **a**. La definición matemática esta dada por lo siguiente:

Definición 1.1 Límite de una función

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga un punto p si bien no debemos insistir en que f esté definida en p. Sea A un número real.

La igualdad $\lim_{x\to p} f(x) = A$

se lee "El límite de $f(x)$, cuando x tiene a p, es igual a **A**", ó "$f(x)$ tiende a **A** cuando x tiende a p". (Apostol Tom M. 2001).

La solución de un límite esta basado en algunas propiedades, que a continuación se muestran

1.1 Propiedades de límites

Propiedades de límites

Sean los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, que existen, entonces;

- $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \Rightarrow \quad b = c$ (Unicidad del límite)
- $\lim_{x\to a} k = k$ con k cte (constante) (Función constante)
- $\lim_{x\to a} x = a$ (Función identidad)
- $\lim_{x\to a}[kf(x)] = k\lim_{x\to a} f(x)$ con k cte (Producto de una cte por una función)
- $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ (Suma de límites)

(Thomas Jr, George B. 2010).

Propiedades de límites (Continuación)

- $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ (Diferencia de límites)
- $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$ (Producto de límites)
- $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, donde $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ (Cociente de límites)
- $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$, n entero positivo (Potencia de un límite)
- $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, n impar positivo
  Si n es par positivo, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$ (Raíz n-ésima de un límite)
- $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = g\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$, si se cumple que
  $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{t\to b} g(t) = g(b)$ (Composición en un límite)

Veamos como podemos resolver un problema utilizando las reglas anteriores:

Ejemplo 1.1

Resolver el siguiente límite: $\lim_{x\to -3}(x^2+3x)$

Solución:
Vemos que el límite esta aplicado a una suma de dos funciones x^2 y $3x$, en consecuencia aplicaremos la propiedad de suma de límites y se tendrá el siguiente resultado

$$\lim_{x\to -3}(x^2+3x) = \lim_{x\to -3} x^2 + \lim_{x\to -3} 3x$$

Para el primer sumando podemos aplicar la propiedad del límite de una potencia y para el segundo sumando límite del producto de una constante por una función entonces se tendrá:

$$\lim_{x\to -3}(x^2+3x) = (\lim_{x\to -3} x)^2 + 3\left(\lim_{x\to -3} x\right)$$

Luego aplicando la propiedad de función identidad obtenemos el resultado siguiente:

$$\lim_{x\to -3}(x^2+3x) = (-3)^2 + 3(-3) = 0$$

Veamos gráficamente el ejemplo anterior, para esta representación utilizaremos un software libre, en esta ocasión utilizaremos el programa GeoGebra que es un programa libre que se puede obtener de la siguiente página http://www.geogebra.org

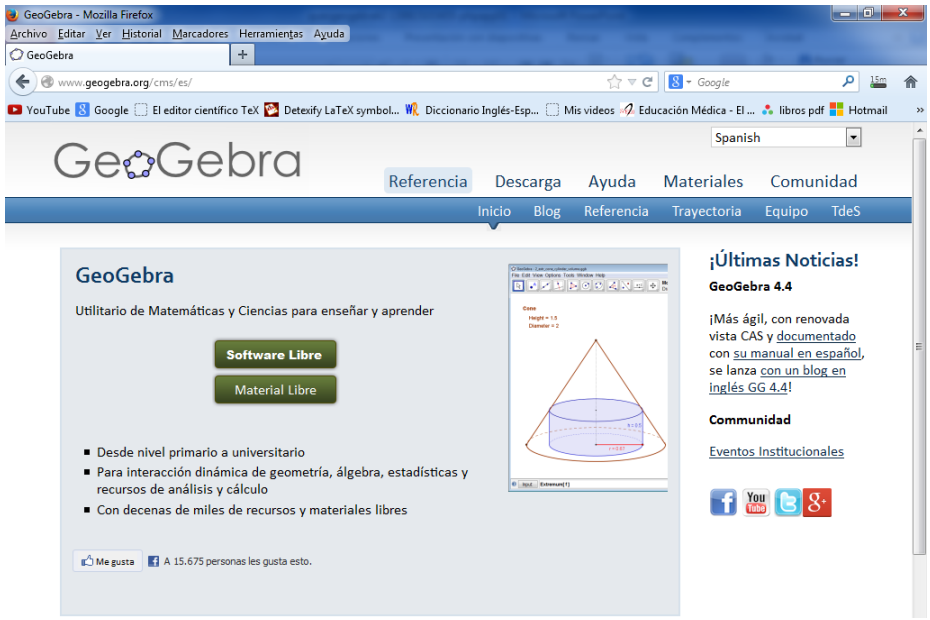


Figura 1.1: Página web del software GeoGebra

Luego de instalar el programa tenemos la siguiente interface

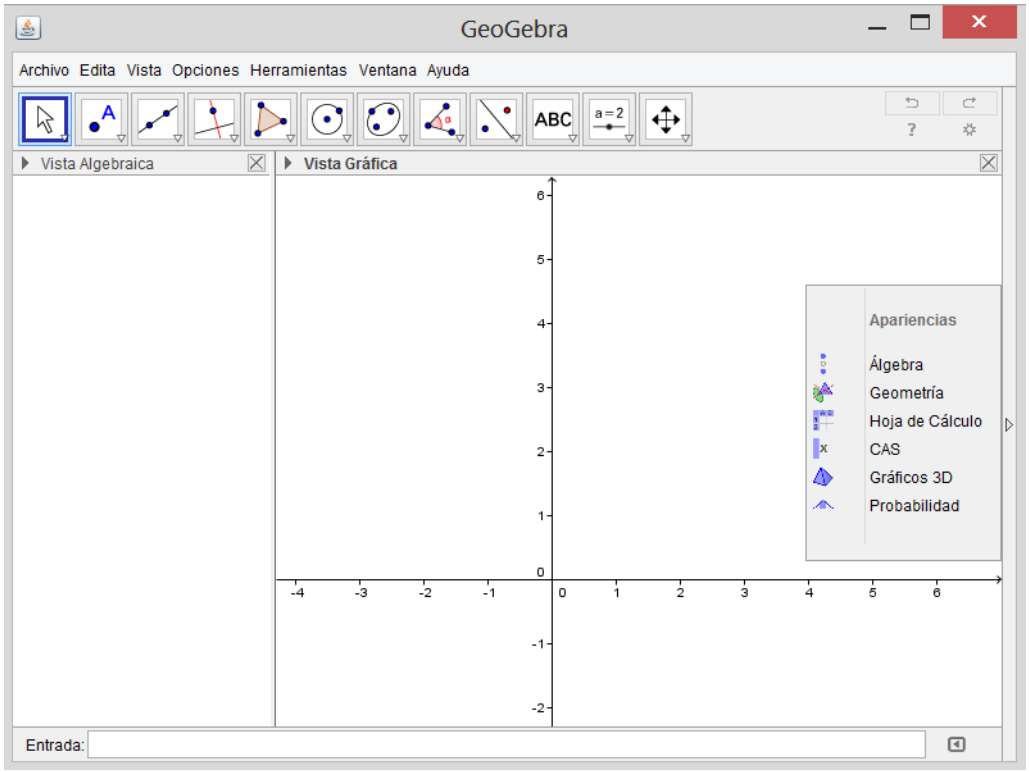


Figura 1.2: Interface del software GeoGebra

para la representación gráfica utilizamos el siguiente proceso:

En la línea de entrada ingresar la función $f(x) = x^2 + 3x$ con el comando

`f(x)=x^2+3x`

Para considerar la potencia se utiliza el acepto circunflejo `^`, si el teclado de la PC no presenta dicho símbolo puede utilizar el código ascii **alf+94**.
Los trazos auxiliares se consigue ingresando a la barra de herramientas en el tercer icono empezando de izquierda a derecha, la herramienta segmento y luego propiedades **Ctrl+E** para mostrar como segmento punteado en Estilo de trazo, adicionalmente para ingresar el texto de la función utilizamos la herramienta texto en el décimo icono, luego escribimos la función. Luego se tendrá una gráfica como la que se muestra a continuación:

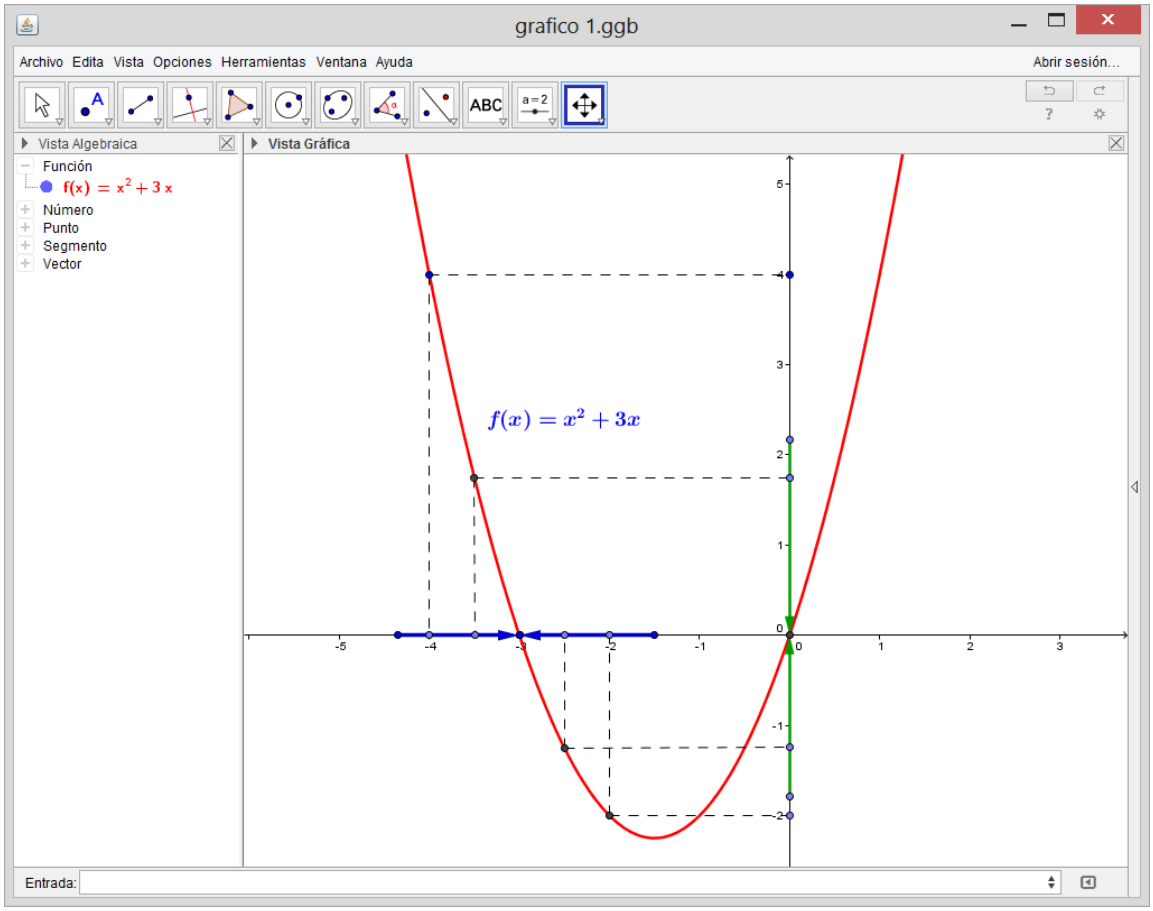


Figura 1.3: Representación del límite de una función gráficamente

Vemos en la gráfica anterior que cuando se toma valores en el eje horizontal cercanos a -3 según se considera el límite en el ejemplo desarrollado, se tiene que las imágenes o los valores de la función $f(x)$ se acercan al punto cero, ésto mostraría que el límite de la función $f(x) = x^2 + 3x$ cuando x tiende a -3,

es 0. Para el resultado ingresamos a la pestaña de ayuda de comandos de GeoGebra como se muestra en la siguiente figura:

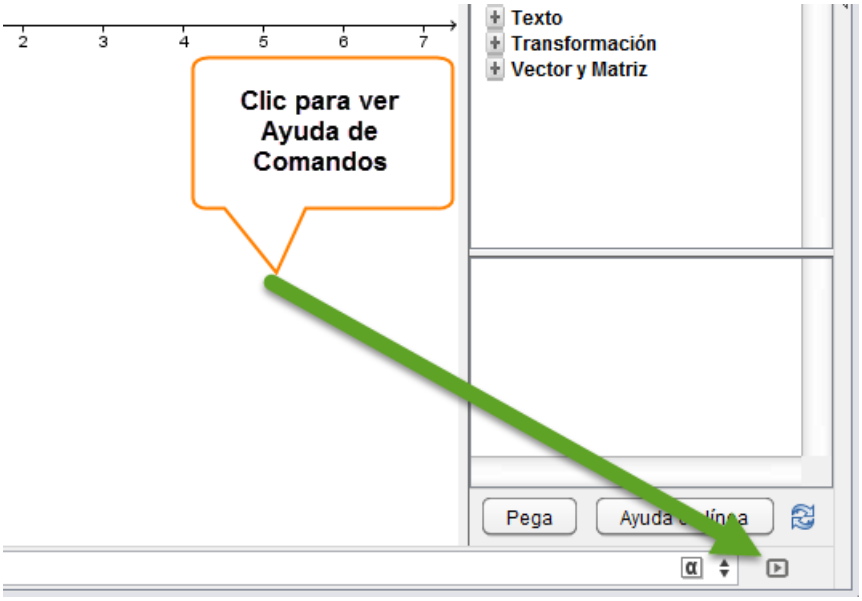


Figura 1.4: Ayuda de comandos de GeoGebra

Desplegando de la ayuda de funciones la pestaña **Funciones y Cálculo** elegimos Límite

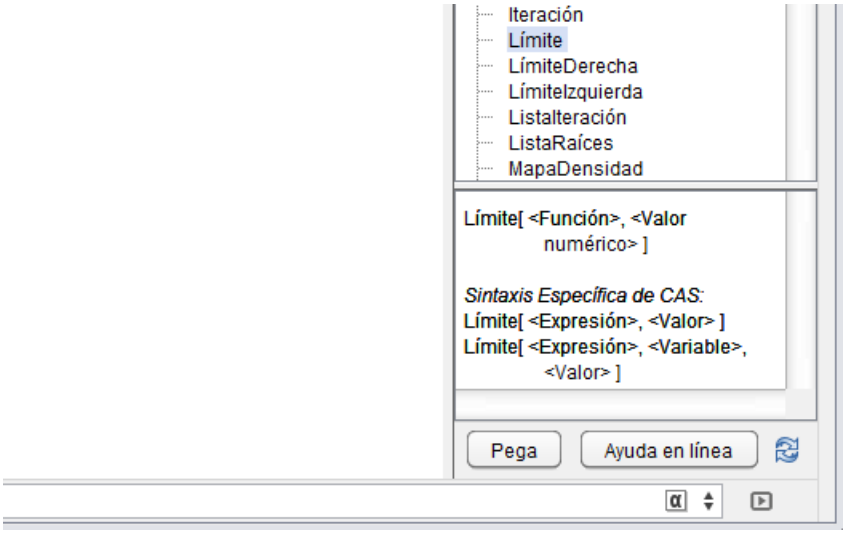


Figura 1.5: Límite de una función en GeoGebra

A continuación haciendo doble clic en la ventana de Entrada ingresamos la función para encontrar el límite y presionamos **enter**



Figura 1.6: Ingreso de la función en GeoGebra

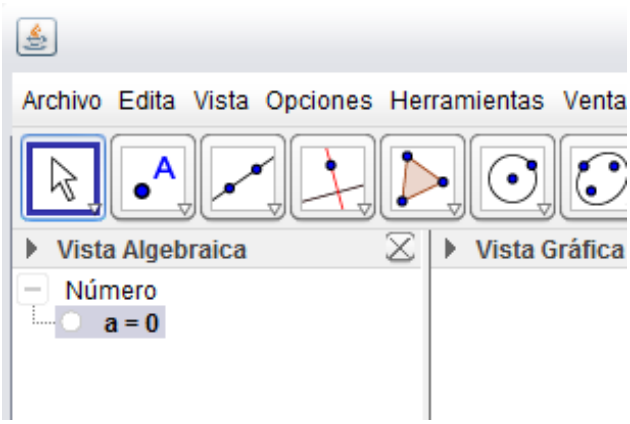


Figura 1.7: Resultado de límite en GeoGebra

En consecuencia se tiene el resultado de $\lim_{x\to -3}(x^2+3x)=0$

wxMaxima

wxMaxima es un software libre cuya página principal de descarga es maxima.sourceforge.net, en la que se puede también descargar manuales de ayuda así como de la instalación en diferentes sistemas operativos:

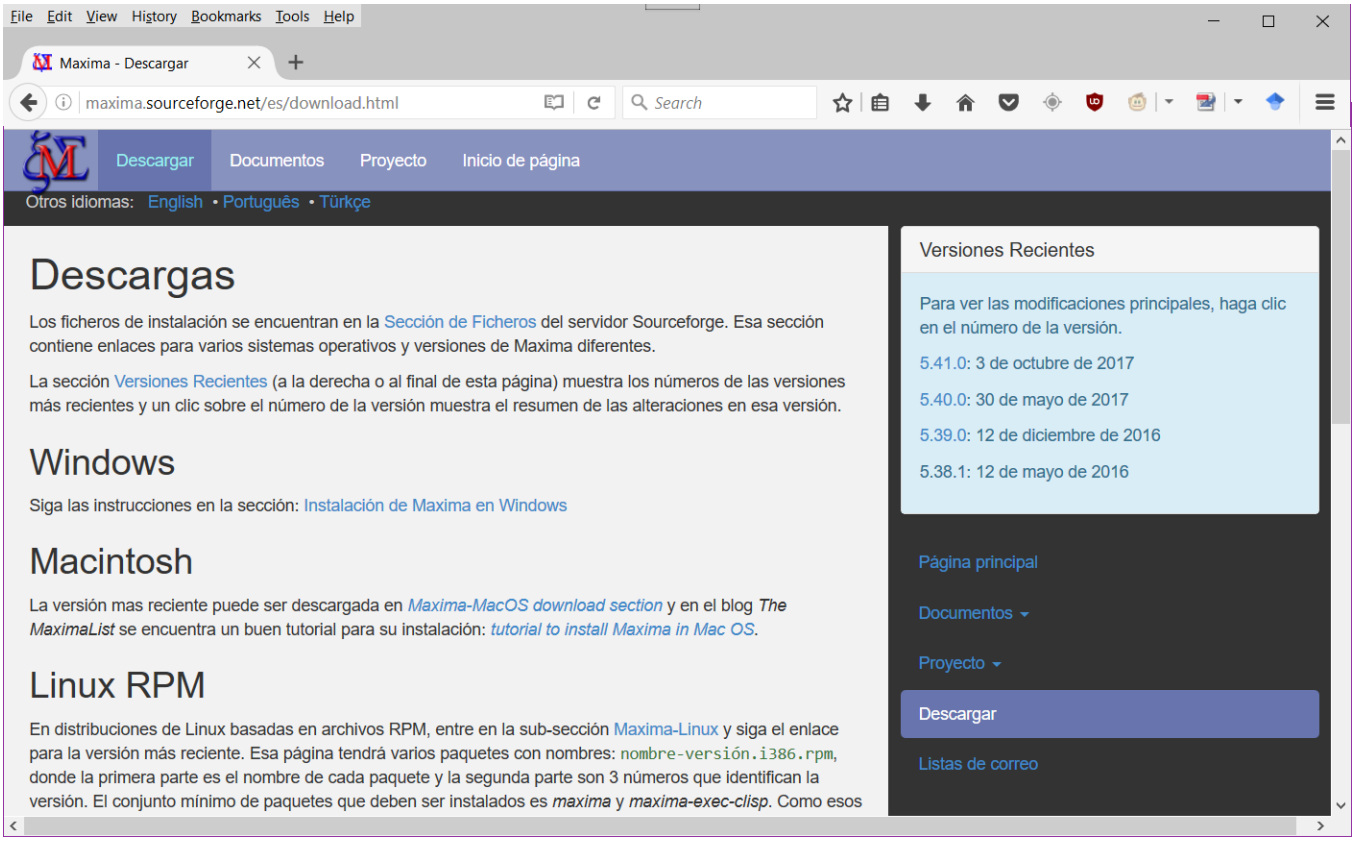


Figura 1.8: Página web wxMaxima

La interface del programa ya instalado se muestra a continuación:

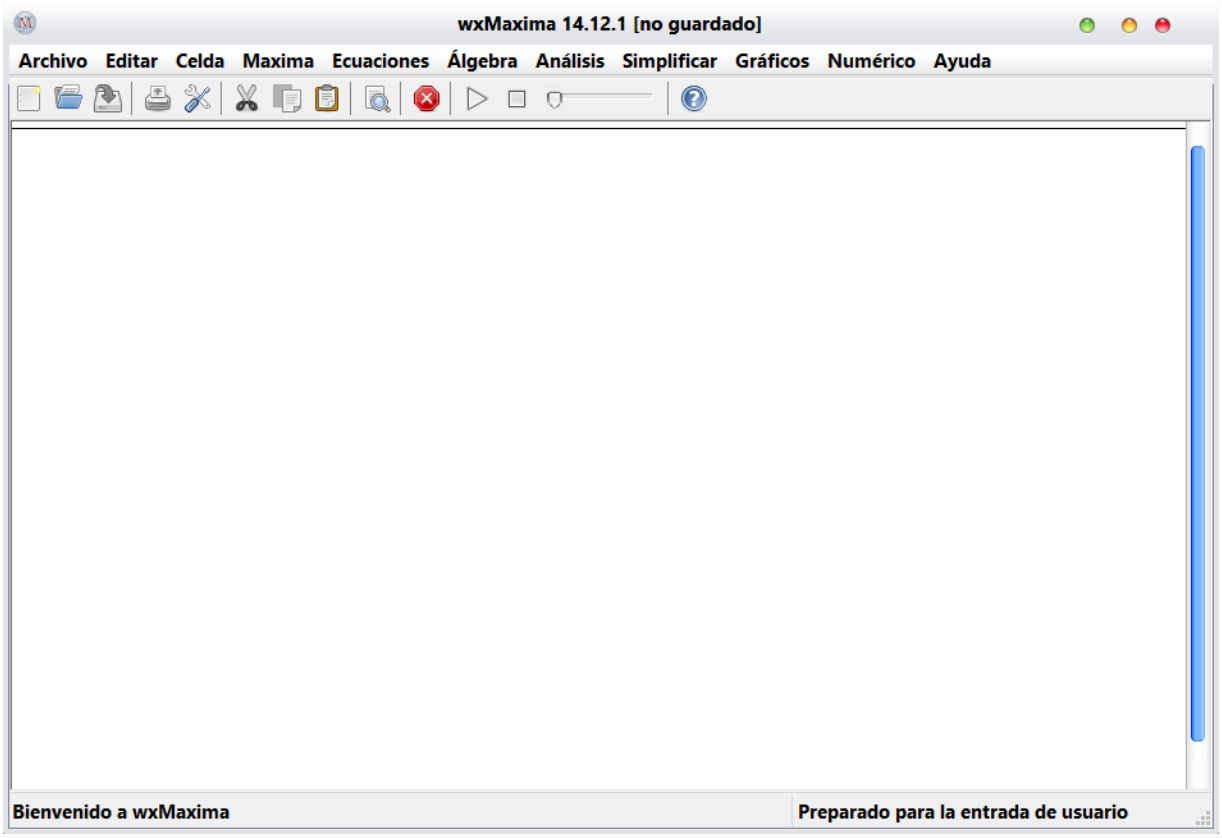


Figura 1.9: Interface de wxMaxima

Ejemplo 1.2

Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-x-6}{x-3}\right)$

b) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x-2}\right)$

Solución:

Veremos la solución utilizando el programa wxMaxima:

Para resolver el límite de la parte **a)** ingresamos a la pestaña **Análisis** y luego a **Calcular límite**, como se muestra en la siguiente figura:

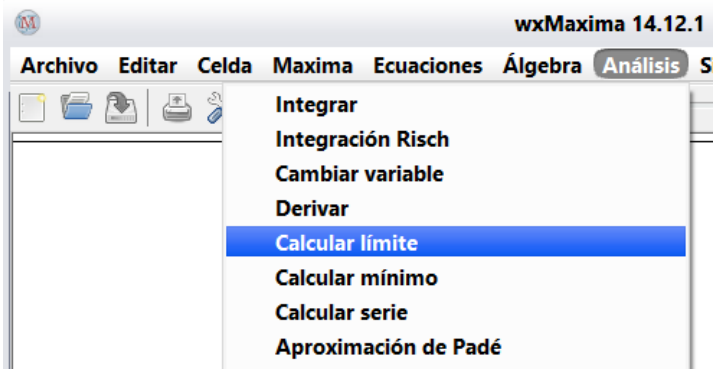


Figura 1.10: Menú límite en wxMaxima

En la ventana emergente ingresamos la función como se muestra a continuación:

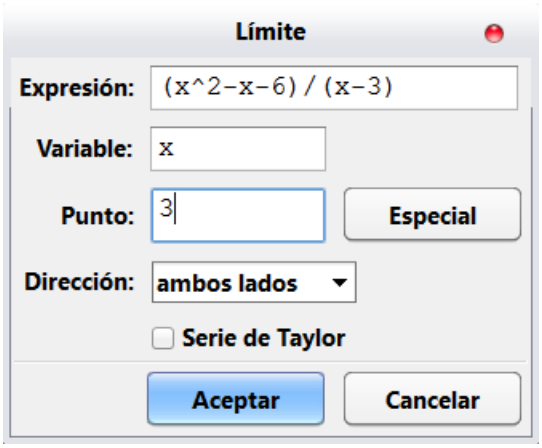


Figura 1.11: Ingreso de la función en wxMaxima

Luego de aceptar se tiene la solución del límite planteado

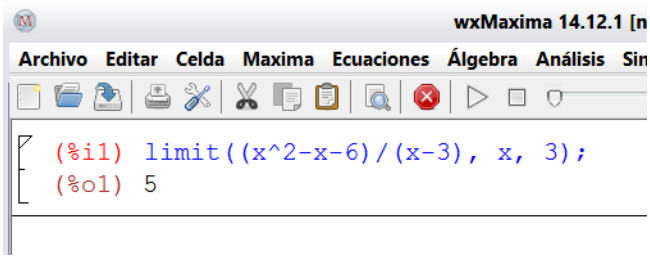


Figura 1.12: Resultado del límite de la función en wxMaxima

La parte b) se deja como ejercicio para el lector.

1.2 Continuidad

Continuidad sugiere pensar en un proceso sin cortes o sin interrupciones y considerando una función quiere decir tener la idea de una gráfica como las que se muestran a continuación:

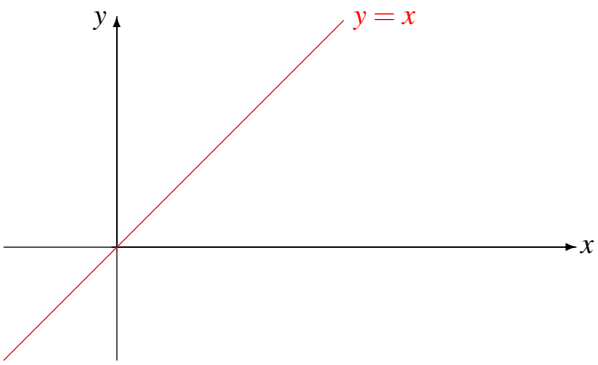


Figura 1.13: Funciones continuas de ejemplo 01

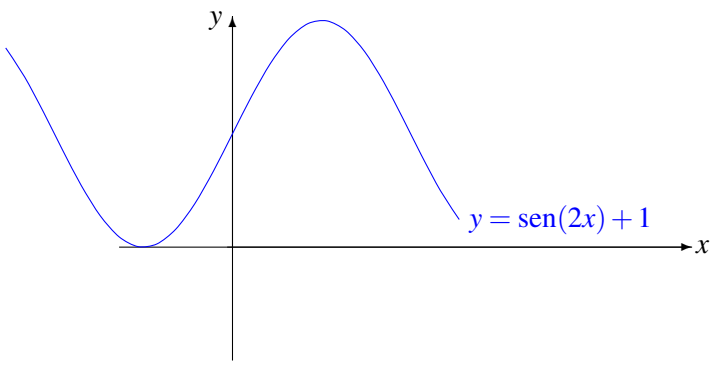


Figura 1.14: Funciones continuas de ejemplo 02

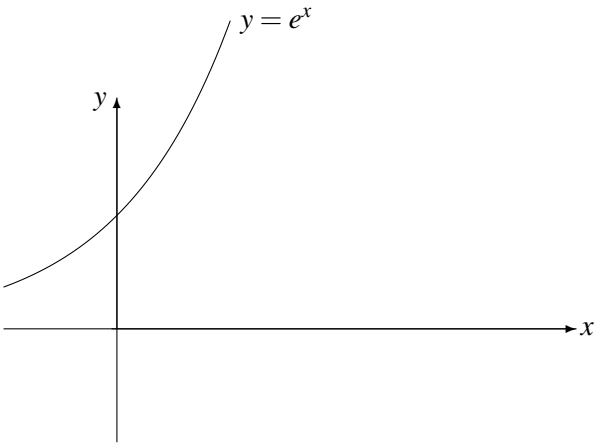


Figura 1.15: Funciones continuas de ejemplo 03

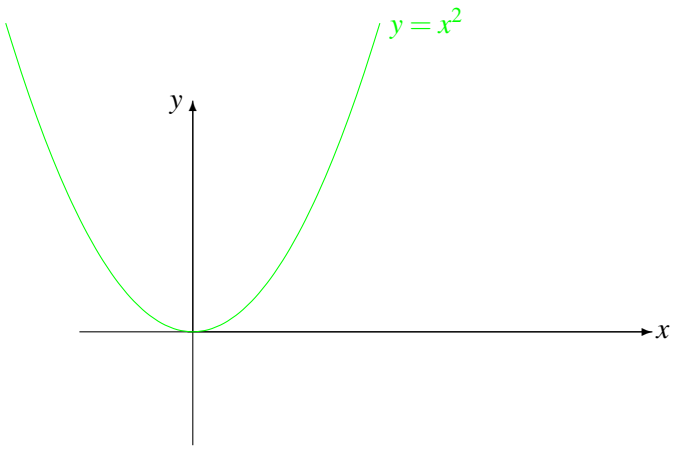


Figura 1.16: Funciones continuas de ejemplo 04

Formalmente la definición de continuidad se tiene a continuación:

Definición 1.2 Continuidad de una función

Se dice que la función f es **continua** en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

i $f(a)$ existe;

ii $\lim_{x\to a} f(x)$ existe;

iii $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

> Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es **discontinua** en a.
> (Leithold L. 1998).

Nota: Si un límite existe debe existir tanto por derecha como por izquierda.

A continuación se tiene las propiedades de continuidad de funciones.

Propiedades de continuidad

Sea $f(x)$ y $g(x)$ funciones continua, entonces:

- Todas las funciones polinómicas son continuas en su dominio
- Todas las funciones racionales son continuas, excepto para los valores donde la función no está bien definidas
- $f(x) \pm g(x)$ es continua
- $f(x).g(x)$ es continua
- $f(x) \div g(x)$ es continua $[g(x) \neq 0]$
- $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua [siempre que $\sqrt[n]{f(x)}$ sea definida]

(Thomas Jr, George B. 2010).

Ejemplos de Funciones discontinuas

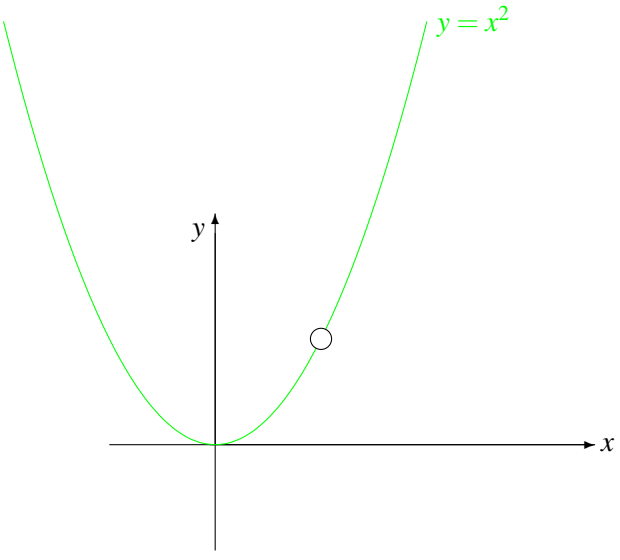


Figura 1.17: Función discontinua $y = x^2$

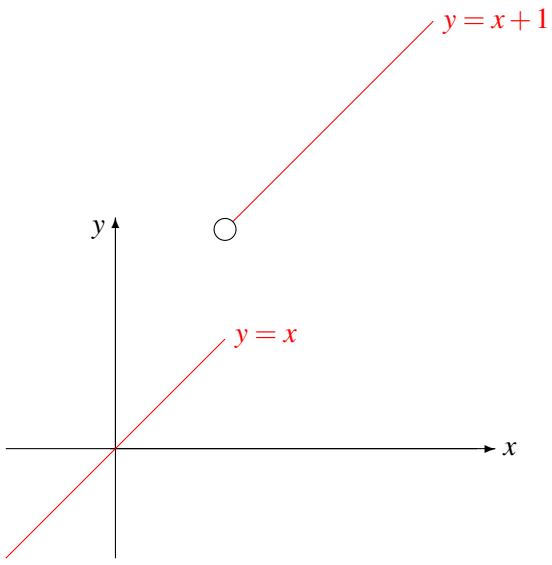


Figura 1.18: Función discontinua por tramos $y = x,\ y = x+1$

Veamos cómo representar la función de la figura 1.14 en el programa GeoGrebra:
En la barra de ingreso ingresar el siguiente comando: $f(x) = si[x < 2, x, x+1]$, que representa la función por tramos, luego dar enter, a continuación ingresar el siguiente comando $(2, f(2))$ para representar el punto no considerado en la función, así obtendremos la función como se muestra a continuación:

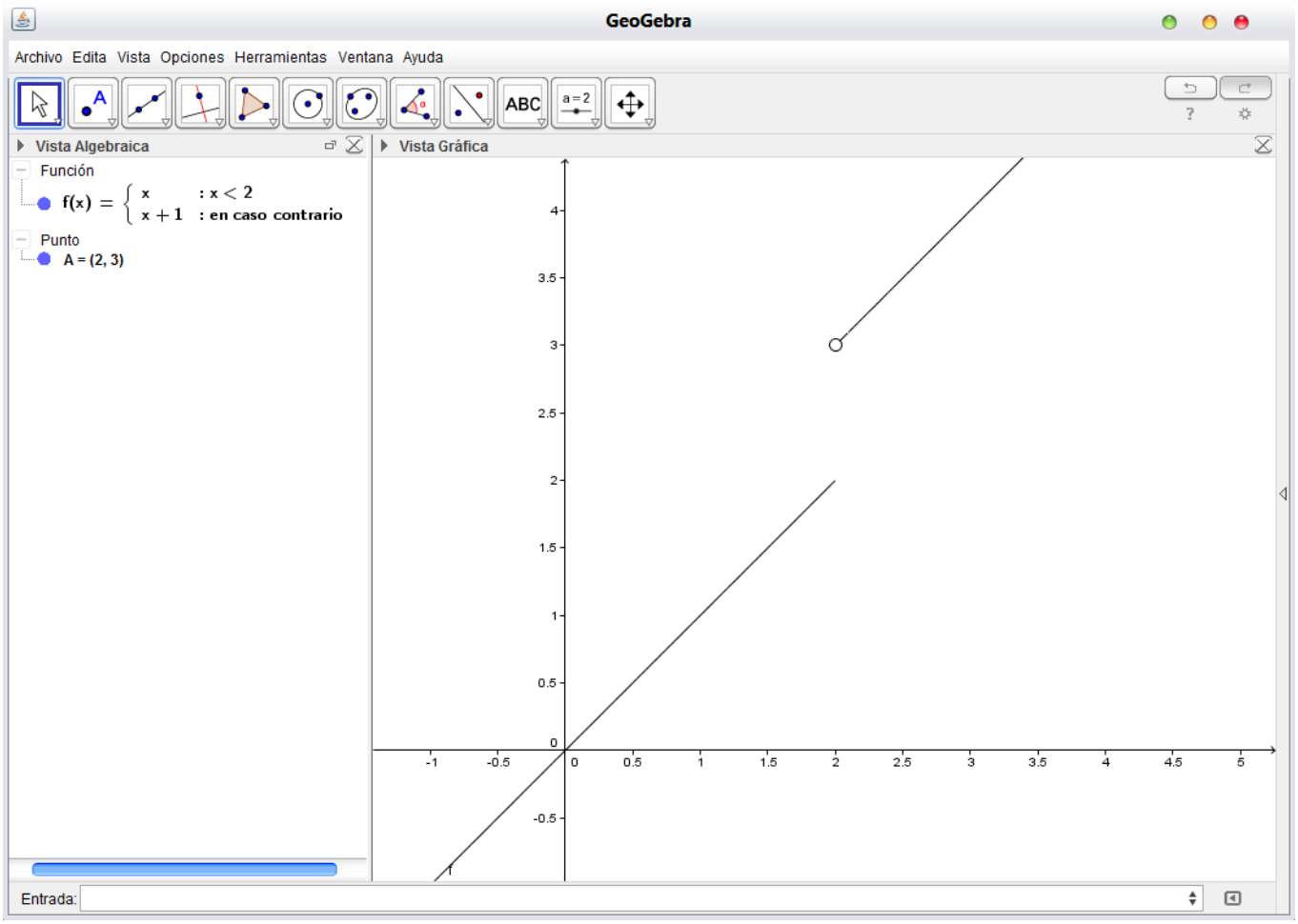


Figura 1.19: Función discontinua por tramos en GeoGebra

Las representaciones gráficas de funciones por tramos es muy importante para el desarrollo de problemas que contienen valor absoluto, raíz cuadrada entre otros, que podemos representar en los programas GeoGebra como en el caso anterior y también en wxMaxima, Sage u otros programas

1.3 Pendiente de una curva

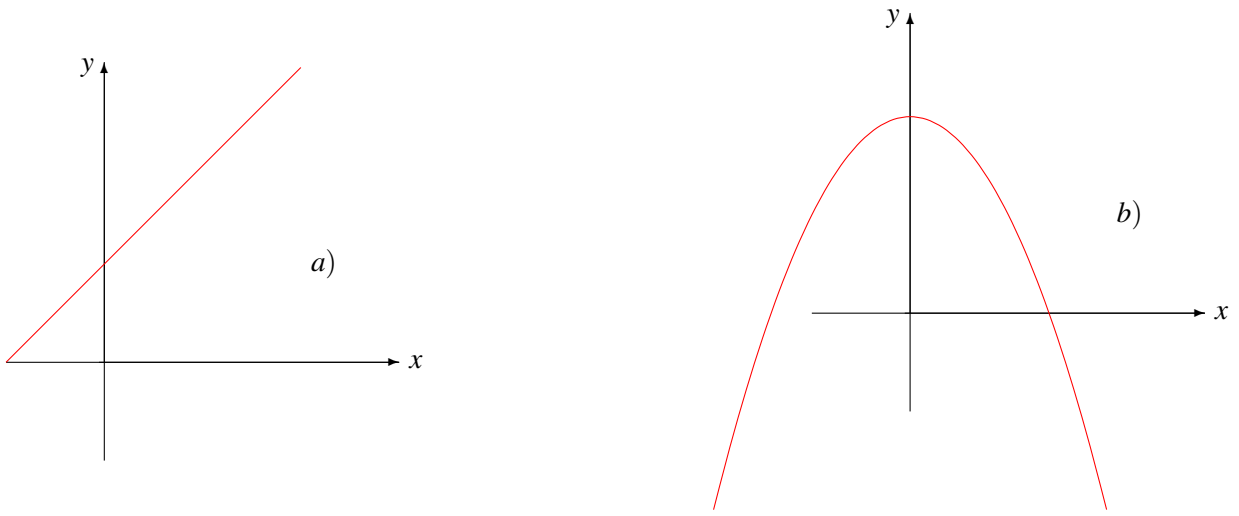


Figura 1.20: Pendiente de una curva

A diferencia de las funciones lineales en la que se tiene una pendiente constante en cada punto de la recta (véase la Figura 1.20 [a)], en un curva se tiene diferentes pendientes en cada punto (veáse la Figura 1.20 [b)]), y en cada punto se tendrá una recta tangente como se muestra en la siguiente figura:

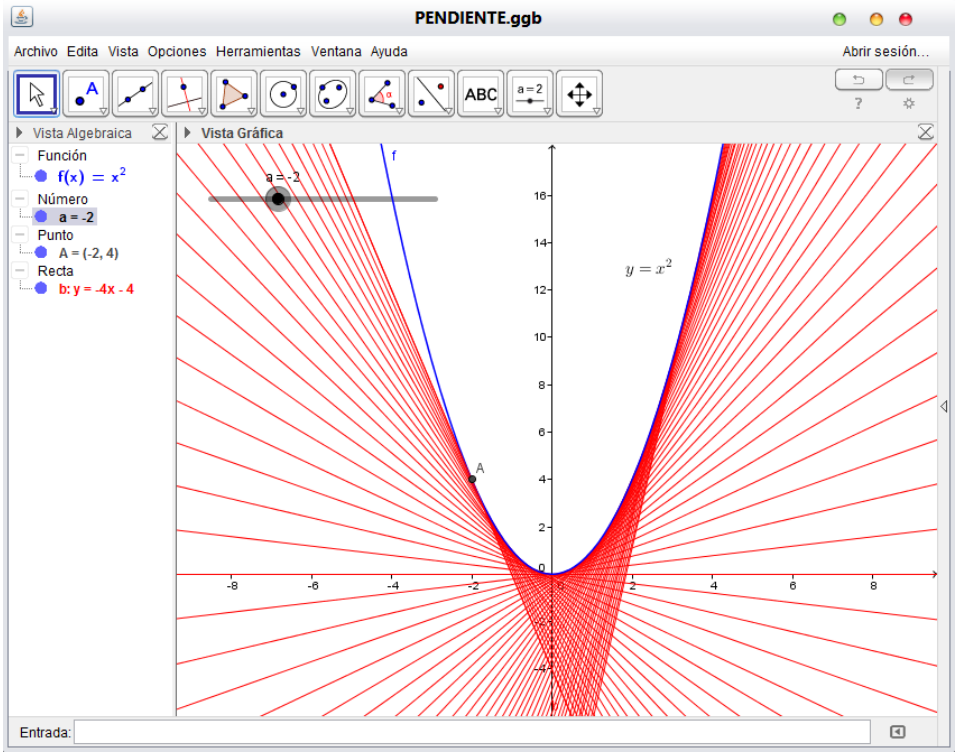


Figura 1.21: Tangentes de una función en GeoGebra

Para encontrar la pendiente de una recta tangente a la curva se considera el desarrollo del límite de la función y utilizando dicha pendiente y un punto de la función podemos encontrar la ecuación de la recta tangente, utilizando la ecuación punto pendiente de una recta, así también se considera mediante la definición siguiente:

Definición 1.3 Recta tangente a una gráfica

Suponga que la función **f** es continua en x_1. La recta tangente a la gráfica de **f** en el punto $p(x_1, f(x_1))$ es

i) La recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_1)$, dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Si este límite existe

ii) La recta $x = x_1$, si

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{es} \quad +\infty \text{ o } -\infty$$

y

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{es} \quad +\infty \text{ o } -\infty$$

(Leithold Louis 1998).

Δx es denominado incremento de x, que muchas veces consideran simplemente h. El cual está dado como la diferencia de un punto final menos un punto inicial, es decir; $\Delta x = x_f - x_0$
Además $\Delta y = f(x_1+\Delta x) - f(x_1)$ que viene a ser el incremento en y. Adicionalmente vemos que para la existencia del límite este debe tender tanto por derecha como por izquierda

Ejemplo 1.3

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3$ en el punto $(1,4)$.

Solución:

En primer lugar encontremos la pendiente según la definición 1.3 se tiene:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^3 + 3) - (x^3+3)}{\Delta x}$$

con la ayuda del programa wxMaxima se tiene:

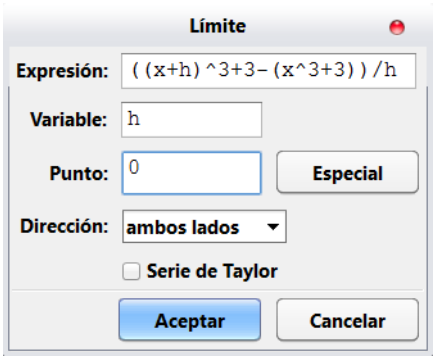


Figura 1.22: Calculo de la pendiente en wxMaxima

Al aceptar el resultado se muestra en la siguiente figura

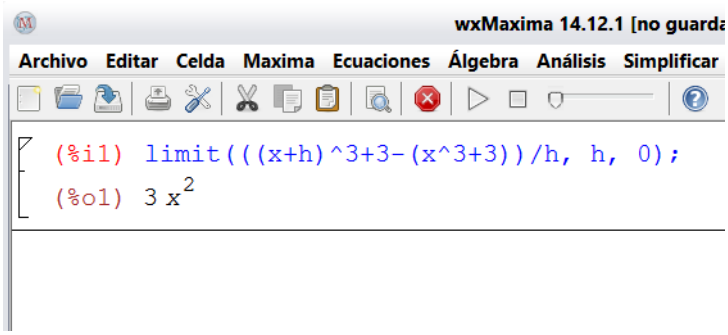


Figura 1.23: Resultado pendiente en wxMaxima

Luego se tiene que la pendiente esta en función a x, es decir; $m(x) = 3x^2$, y en el punto $(1,4)$ como $x = 1$, la pendiente es 3, es decir; $m(1) = 3(1)^2 = 3$
Para encontrar la ecuación de la recta tangente en dicho punto es necesario un punto de paso y la pendiente y remplazamos en la ecuación punto pendiente de la recta: $y - y_0 = m(x - x_0) = y - 4 = 3(x - 1)$, de donde se tiene la ecuación $y = 3x + 1$.
Podemos encontrar la solución gráfica rápidamente con el programa Graph que es un programa de libre distribución creado por Ivan Johansen que se puede descargar de http://www.padowan.dk/download/ dicho procedimiento se muestra a continuación:
Ingresamos la función, ingresando al menú del programa como se muestra en la figura siguiente

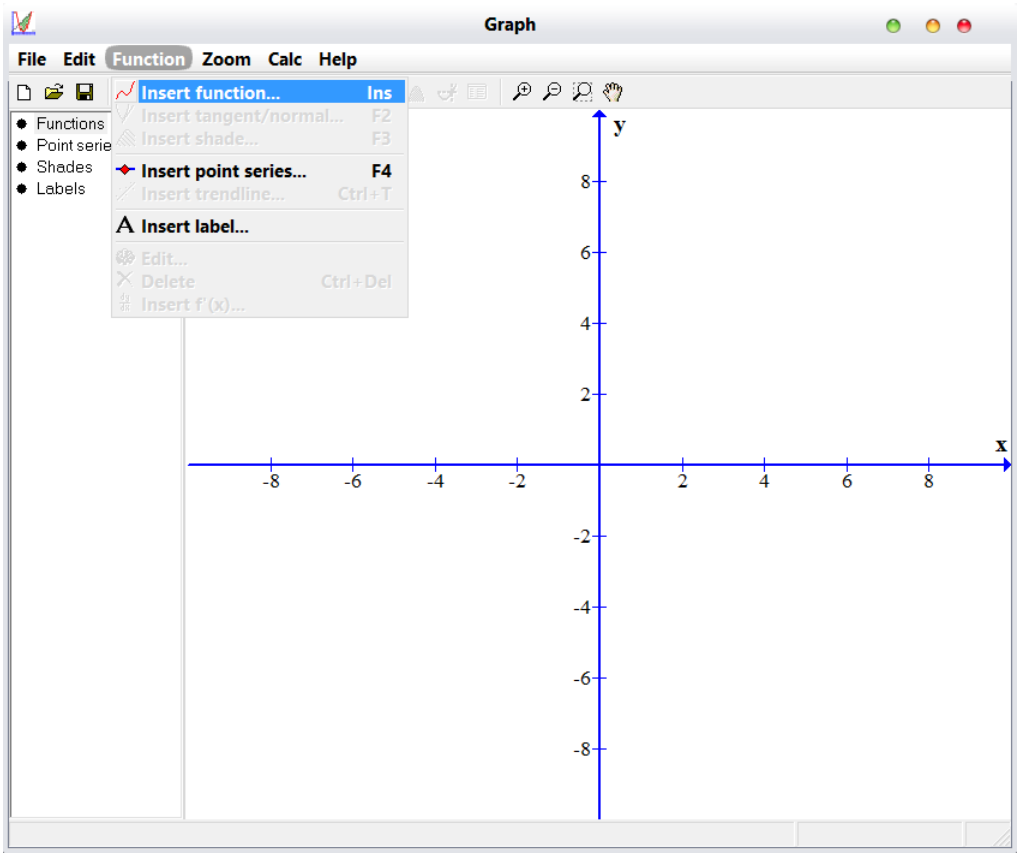


Figura 1.24: Ingreso de función en Graph

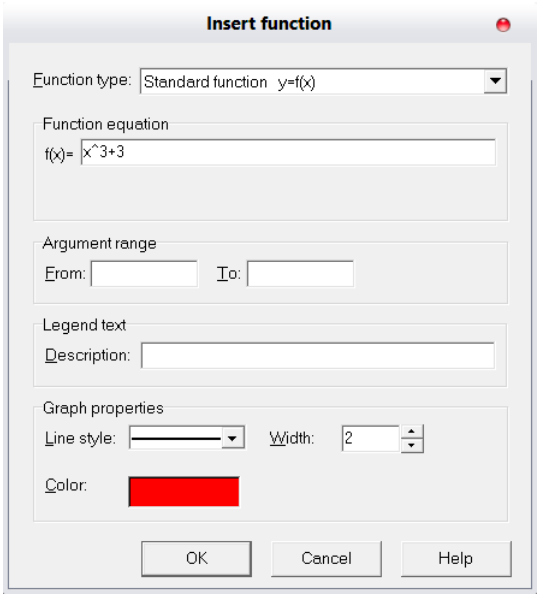


Figura 1.25: Ingreso de función en Graph (menú)

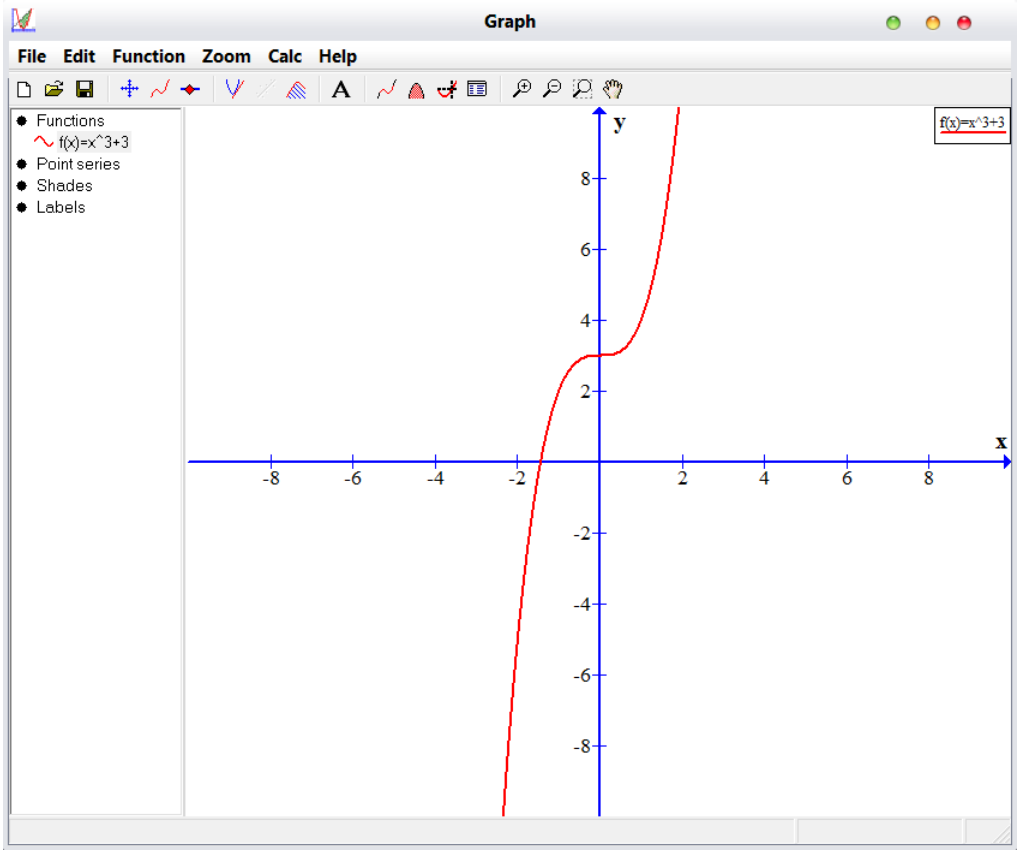


Figura 1.26: Resultado de función en Graph

Luego ingresamos al menú function y hacemos clic en el menú insertar tangente

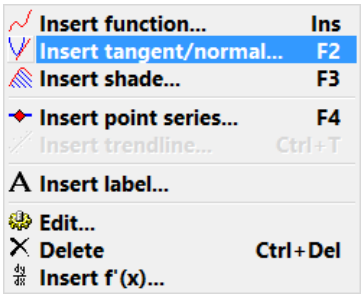


Figura 1.27: Ingreso de tangente en Graph (menú)

a continuación en el menú emergente elegimos el punto $x = 1$ y como resultado tenemos:

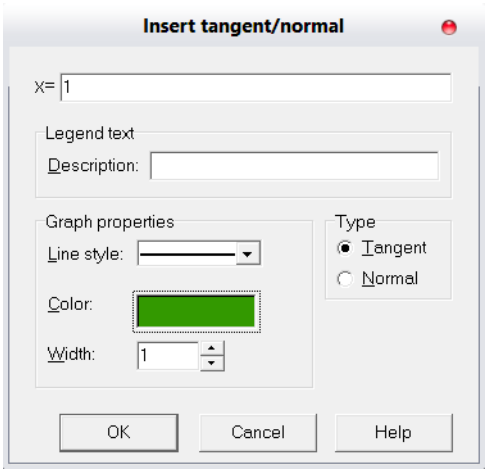


Figura 1.28: Ingreso de tangente en Graph

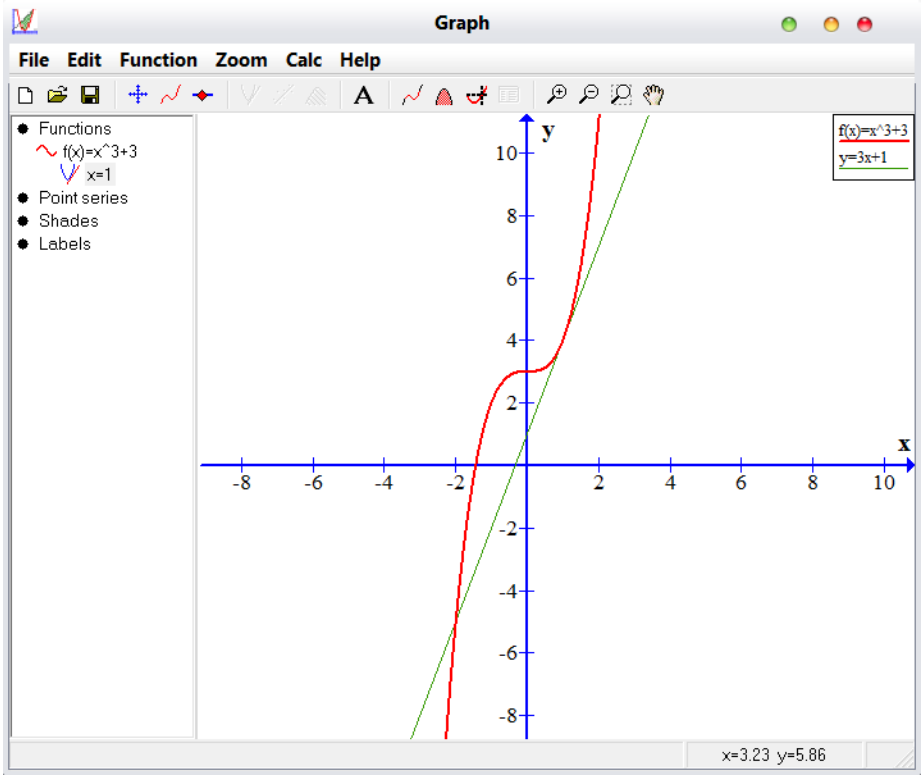


Figura 1.29: Resultado de tangente en Graph

Vemos en la Figura 1.29 que la ecuación de la recta tangente es $y = 3x + 1$ con pendiente 3, dando solución al problema.

1.4 Razón de cambio

El presente tema tiene diversas aplicaciones como en la economía, estadística, física entre otras ramas, también es utilizada en la aplicación de la pendiente de una curva, tema tratado anteriormente, para la física se considera como velocidad y para el caso económico se denomina tasa de cambio o tasa de crecimiento promedio y en general la razón de cambio no es más que la variación o cambio de una variable llamada dependiente en relación al cambio de otra variable llamada independiente, veamos algunas definiciones en referencia al tema.

Definición 1.4 Incremento

Sea x una variable con un primer valor x_1 y un segundo valor x_2. Entonces el cambio en el valor de x, que es $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x, y se denota por Δx.

(Jagdish C. Arya/Robin W. Lardner 1992).

Definición 1.5 Tasa de cambio

La **tasa de cambio** promedio de una función f sobre un intervalo de x a $x+\Delta x$ se define por la razón $\Delta y/\Delta x$. Por tanto, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observación Es necesario que el intervalo completo de x a $a+\Delta x$ pertenezca al dominio de f.

(Jagdish C. Arya/Robin W. Lardner 1992).

En referencia a las definiciones anteriores 1,4 y 1,5 a la tasa de cambio también se le llama razón de cambio promedio, por otro lado si aplicamos límite a la razón de cambio promedio, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Es llamada razón de cambio instantánea que también vimos que es la pendiente de una curva, puesto que la pendiente es la variación de la variable y con respecto a la variable x, gráficamente considerando dos puntos P y Q de coordenadas $(x, f(x))$ y $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ respectivamente de la gráfica $y = f(x)$, donde Δx es el incremento en x y Δy es el incremento en y, el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente del segmento PQ, o también la razón de cambio de la variable y con respecto a x, de las relaciones de los puntos se consigue la siguiente relación muy utilizada en el tema de incrementos y tasas que es $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, considerada en la definición 1.5. Los incrementos de la función $y = f(x)$ se muestra a continuación en la figura 1.26

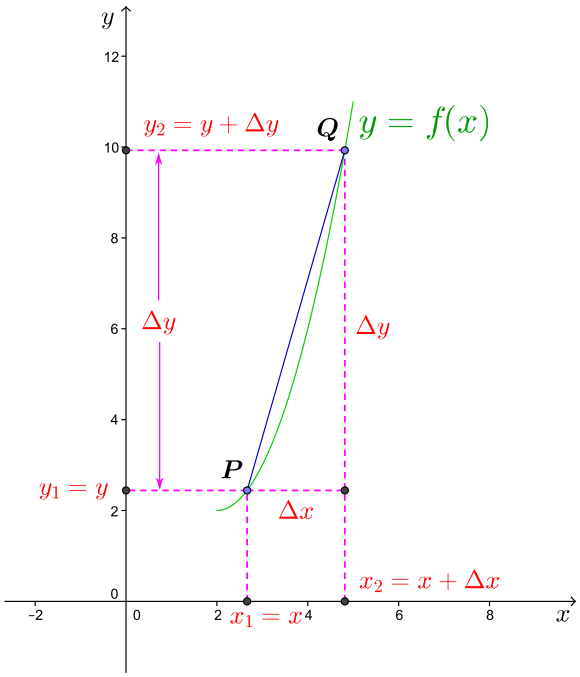


Figura 1.30: Incrementos de la función $y = f(x)$

Ejemplo 1.4

Dada $f(x) = x^2$, calcule Δy si $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}2$

Solución:
La solución a este problema será gráficamente, para ello utilizaremos el programa GeoGebra:

Los pasos para la solución son los siguientes:

a) Ingreso de la función $f(x) = x^2$ utilizando el comando **`y=x^2`**

b) Ingreso del valor $x = 1$ utilizando el comando **`x=1`**, que es x_1

c) Puesto que el incremento según dato es $\Delta x = 0{,}2$, entonces $x_2 = 1{,}2$, en consecuencia ingresamos $x = 1{,}2$ utilizando el comando **`x=1.2`**

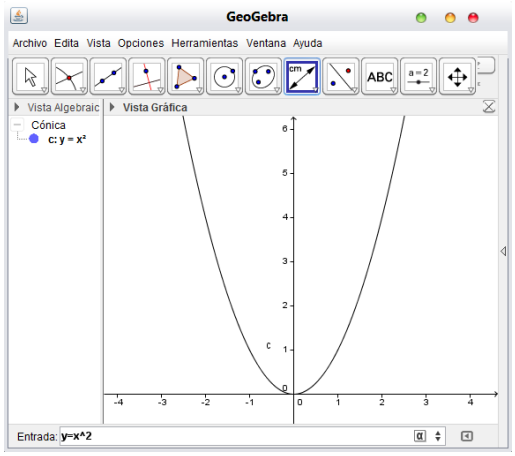
d) ubicamos los puntos de intersección de las rectas verticales con la curva ver figura **1.28 [a)]**

e) trazamos las rectas perpendiculares que pasa por un punto y una recta ver figura **1.28 [b)]**

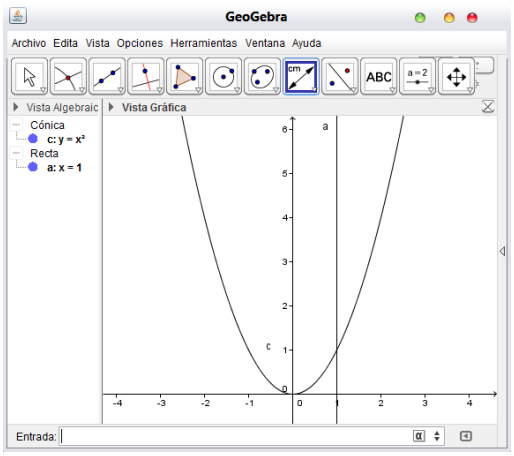
f) ubicamos los puntos de intersección de las rectas horizontales con el eje y ver figura **1.28 [a)]**

g) y por último medimos la distancia entre los puntos encontrados anteriormente

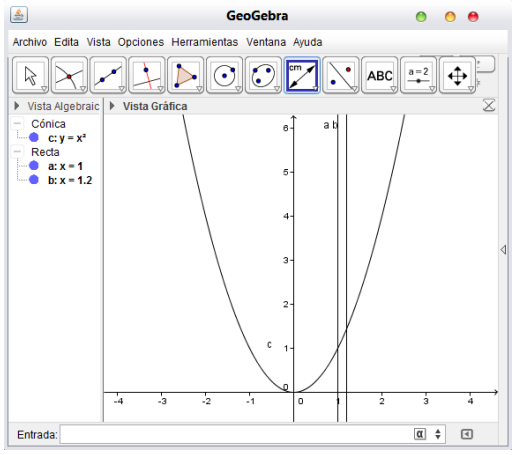
h) en consecuencia el incremento en y es el resultado obtenido que es $\Delta y = 0{,}44$, con lo que queda resuelto el problema.



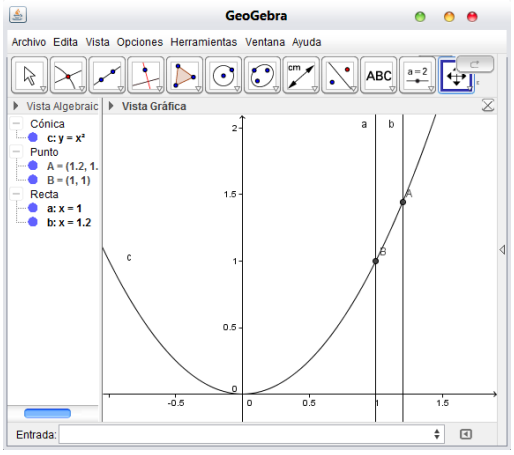
(a) Ingreso de la función



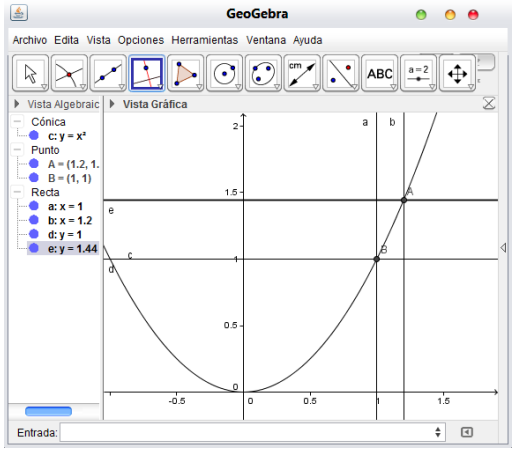
(b) Ingreso del valor $x = 1$



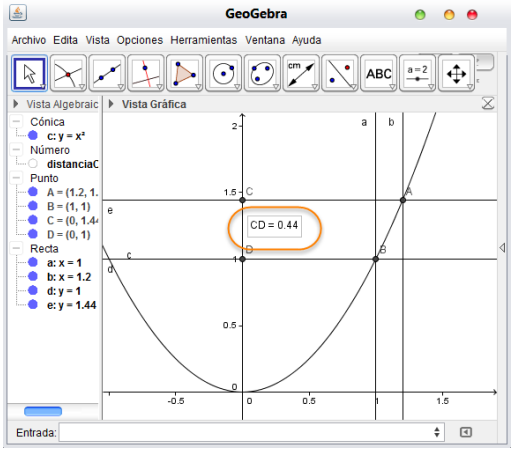
(c) Ingreso del valor $x = 1,2$



(d) Puntos de intersección

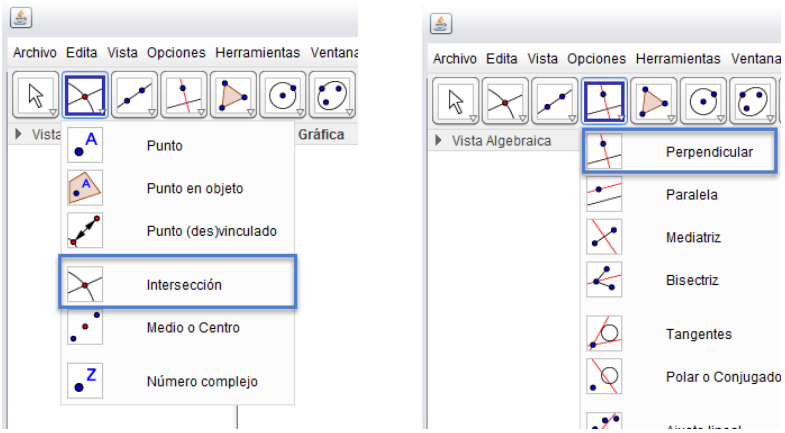


(e) Rectas horizontales



(f) Distancia entre puntos

Figura 1.31: Solución gráfica de incrementos mediante el programa GeoGebra



(a) Sub menú intersección (b) Sub menú perpendicular

Figura 1.32: Sub menús utilizados del programa GeoGebra

1.5 Aplicaciones

Ejemplo 1.5

Evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$$

Solución:

En esta ocasión utilizaremos el software **Sage**. Sage es un software libre que se utiliza en plataformas LINUX, pero también podemos lograr utilizar en plataformas WINDOWS considerando una máquina virtual que también es gratuita **Oracle VM Virtual**, el programa lo puede descargar de: `http://www.sagemath.org/es/`, luego el proceso es muy sencillo la imagen descargada de la red la importamos en la máquina virtual y luego procedemos a utilizarla, veamos la solución del problema a continuación:

La interface del programa Sage se muestra a continuación

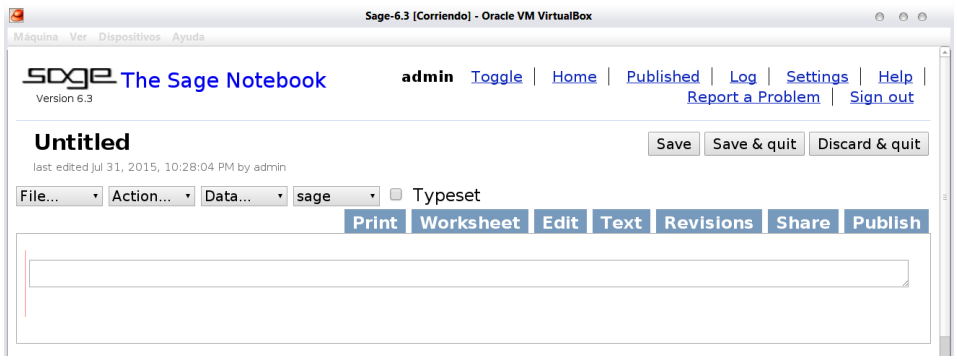


Figura 1.33: Interface del programa Sage

A continuación ingresamos la función para encontrar el límite, utilizando el siguiente comando `limit((x^2+3*x+2)/(x^2-1),x=-1)` Luego hacemos clic en evaluar obteniendo de esta manera el resultado como se muestra en la siguiente figura

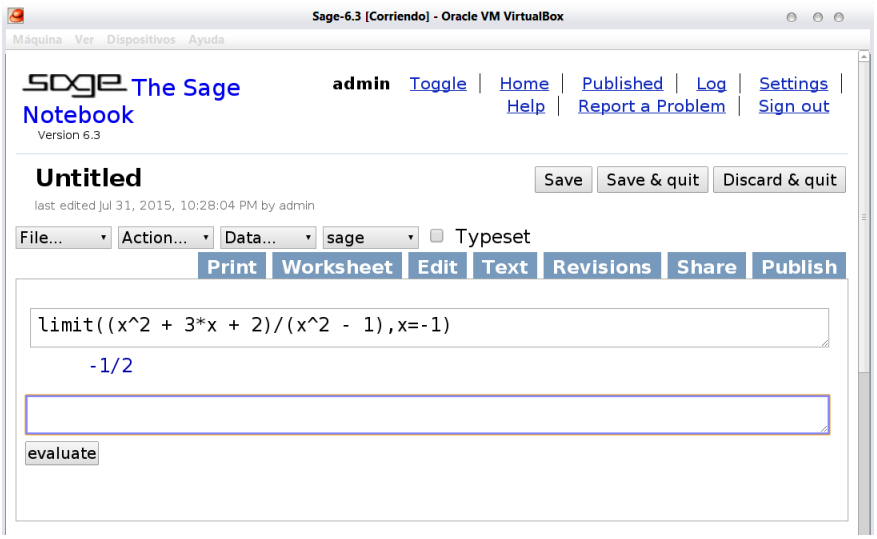


Figura 1.34: Resultado de límite en Sage

Ejemplo 1.6

Evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{(4+x)}-2}{x}$$

Solución:

También veamos el resultado en el programa Sage, utilizando el mismo proceso anterior se tiene:

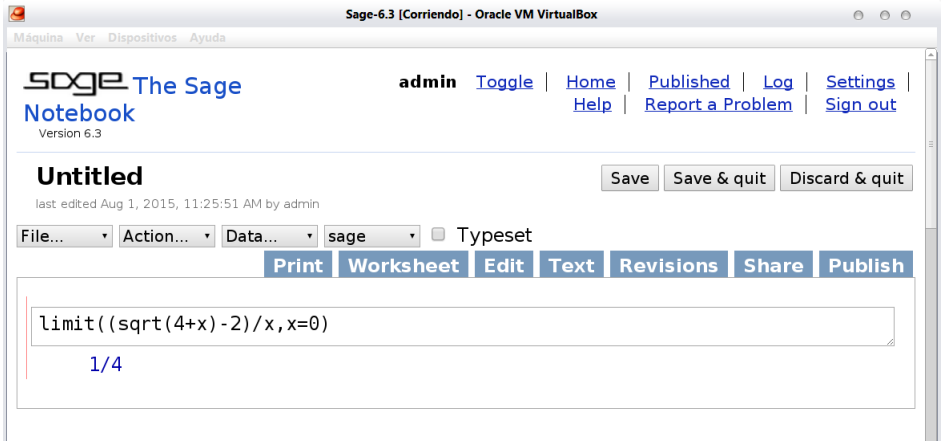


Figura 1.35: Resultado de límite en Sage

Ejemplo 1.7

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & si \quad x>3 \\ x^2+2 & si \quad x\leq 3 \end{cases}$$

Analice la continuidad de $f(x)$ en el punto $x=3$.

Solución:

Veremos la solución utilizando el programa wxMaxima:

Para la solución si la función es continua en el punto $x=3$, debe cumplir las tres condiciones

✓ La primera condición es que la función debe estar definida en $x=3$, veamos el siguiente gráfico

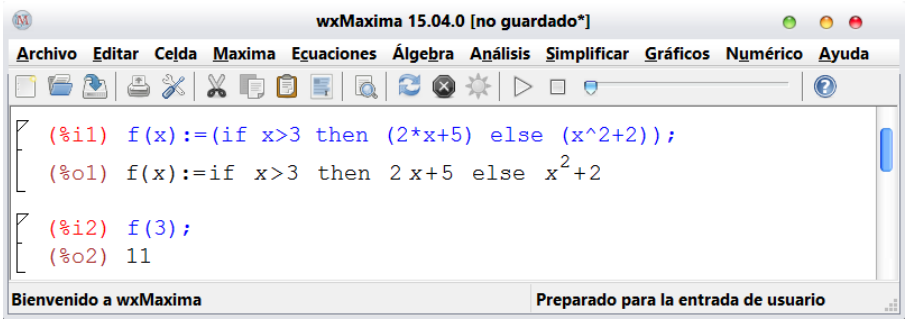


Figura 1.36: Análisis - función continua 1^{ra} condición

✓ La segunda condición es que el límite exista para ello veamos el límite de la función por derecha e izquierda

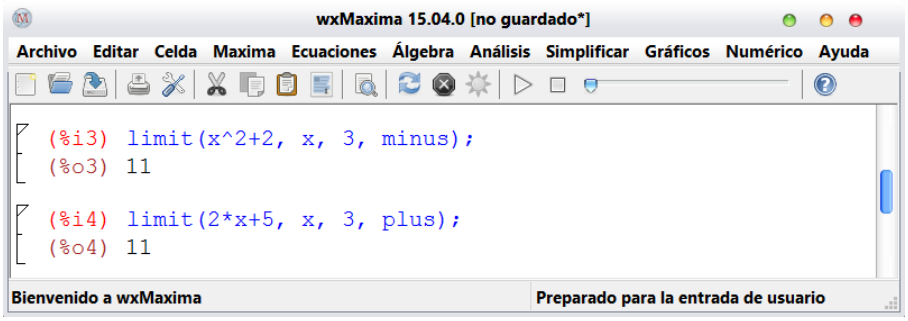


Figura 1.37: Análisis - función continua 2^{da} condición

Vemos que el límite por derecha y por izquierda tienen por resultado 11, entonces el límite de la función existe.

✓ La tercera condición es que $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$, como el límite es igual a 11 y $f(c)$ también es igual a 11, por tanto podemos decir que la función es continua en $x=3$

La gráfica de la función se muestra a continuación utilizando el programa wxMaxima, puesto que ya se tiene definida la función, ingresamos al menú **Gráficos>Gráficos 2D**, e ingresamos la función f(x) como se muestra en la figura siguiente:



Figura 1.38: Análisis - función continua menú gráfico

El resultado gráfico muestra la continuidad en el punto $x = 3$.

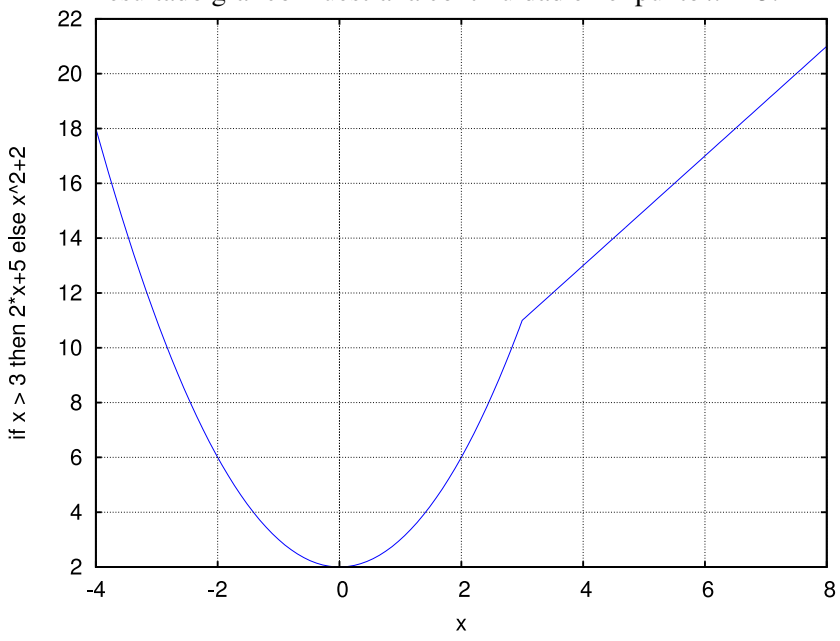


Figura 1.39: Análisis - función continua gráfico

Ejemplo 1.8

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & si \quad x\leq 0\\ -x^2-1 & si \quad x>0\end{cases}$$

Analice la continuidad de $f(x)$ en el punto $x=0$.

Solución:

Veremos la solución utilizando el programa wxMaxima:

Para la solución si la función es continua en el punto $x=0$, debe cumplir las tres condiciones

✓ La primera condición es que la función debe estar definida en $x=0$, veamos el siguiente gráfico

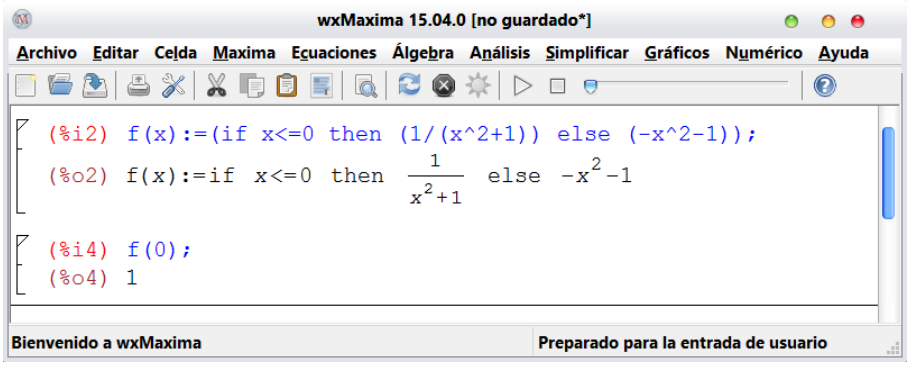


Figura 1.40: Análisis - función continua 1^{ra} condición

✓ La segunda condición es que el límite exista para ello veamos el límite de la función por derecha e izquierda

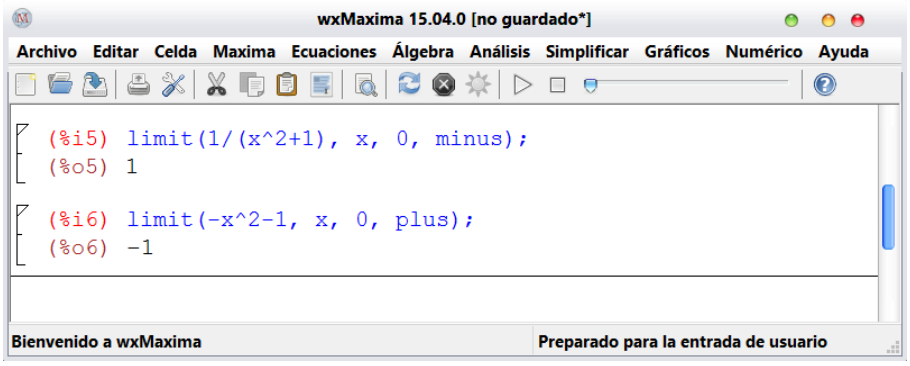


Figura 1.41: Análisis - función continua 2^{da} condición

Vemos que el límite por derecha y por izquierda tienen diferentes resultados 1 y -1, en consecuencia el límite de la función no existe.

✓ La tercera condición es que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, como el límite no existe no se cumple la tercera condición, por tanto podemos decir que la función no es continua en el punto $x = 0$

La gráfica de la función que se muestra a continuación, es utilizando el programa GeoGebra, en la que se visualiza la discontinuidad de la función en el punto 0, o también se puede indicar que se tiene un salto. Para dicho efecto en la ventana de entrada se ingresó el siguiente comando `f(x)=Si[x<=0,1/(x^2+1),-x^2-1]` en consecuencia se tiene la siguiente figura en la que se muestra cláramente la discontinuidad de la función $f(x)$:

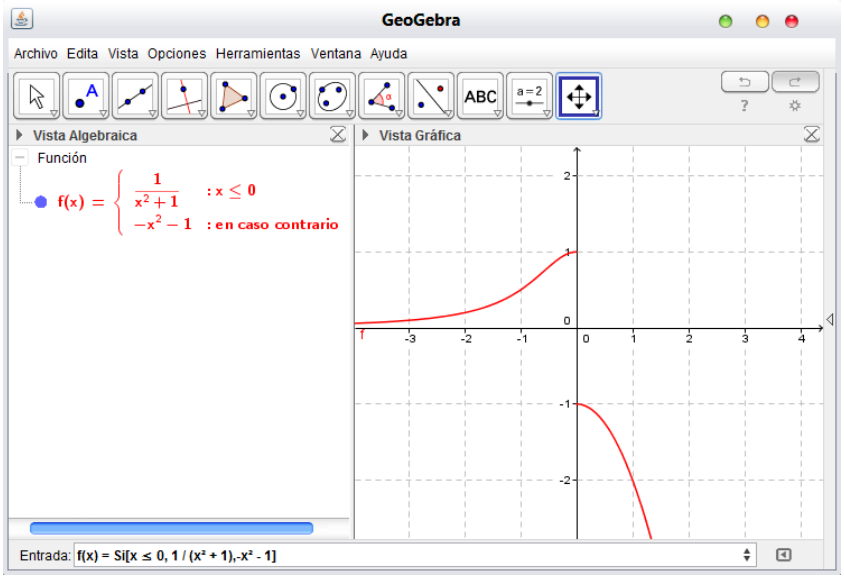


Figura 1.42: Análisis - función continua gráfica

Ejemplo 1.9

Determinar la pendiente y la ecuación de la recta tangente en el punto dado de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 2$ en $(3,7)$
2. $y = 2x^2 - 3$ en $(2,5)$
3. $y = \dfrac{1}{x}$ en $(1,1)$
4. $y = x^2 + 10x + 25$ en $(-3,4)$

Solución:
Veremos la solución utilizando el programa GeoGebra:

Para el desarrollo del ejemplo utilizaremos los siguientes pasos en el programa GeoGebra.

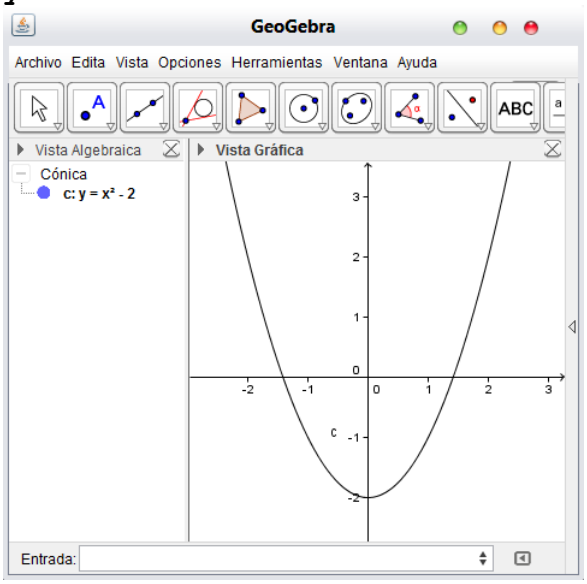
✓ Ingreso de la función

✓ Ingreso del punto de tangencia

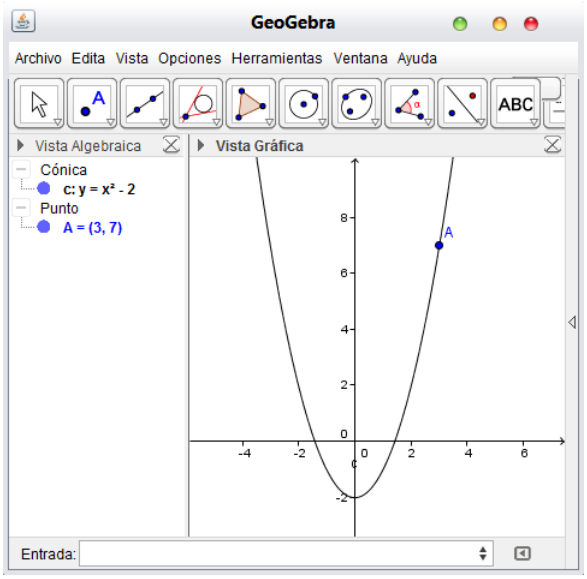
✓ Menú de herramientas tangentes y haciendo clic en el punto y la curva de la función $f(x)$

Pendiente y recta tangente de $y = x^2 - 2$ en $(3,7)$

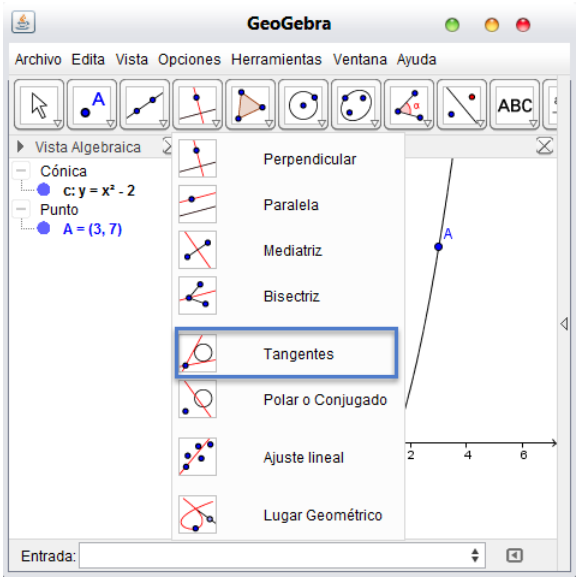
1. Ingreso de la función mediante el comando **`y=x^2-2`**



2. Ingreso del punto de tangencia mediante el comando **`(3,7)`**



3. Ingreso al menú de herramientas tangentes



4. Resultado final la ecuación de la recta es $y = 6x - 11$, con pendiente igual a 6

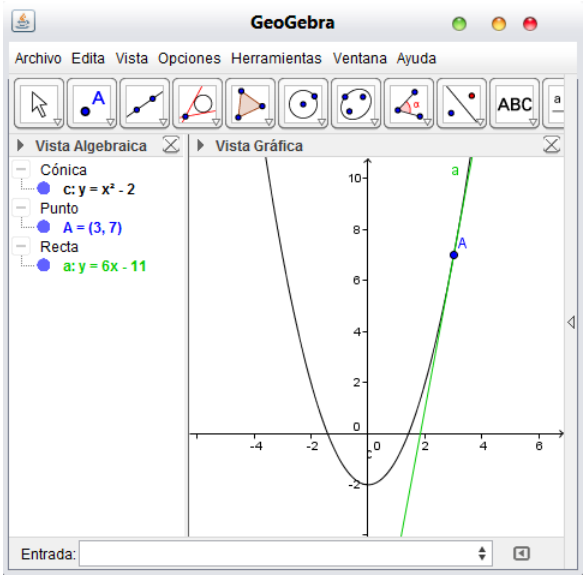
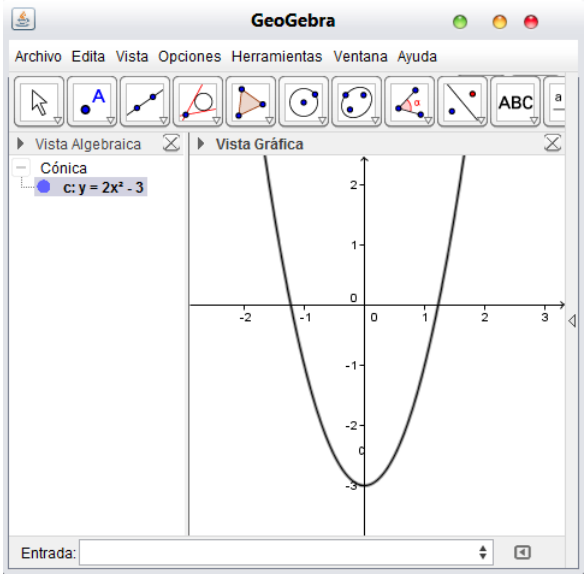


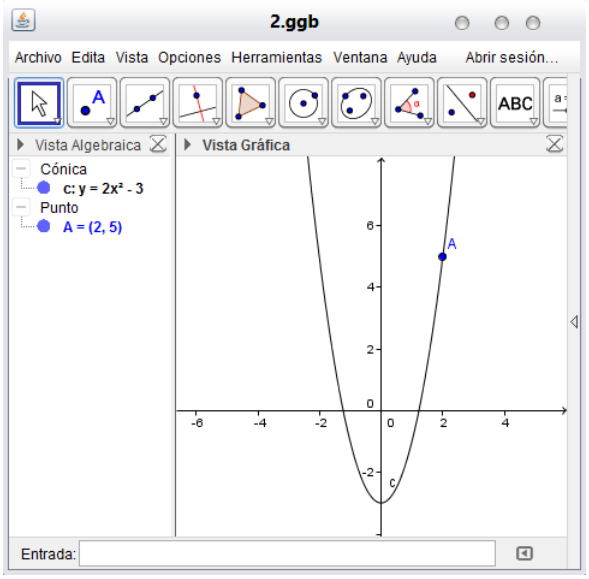
Figura 1.43: Proceso de solución tangentes primer ejemplo

Pendiente y recta tangente de $y = 2x^2 - 3$ en $(2,5)$

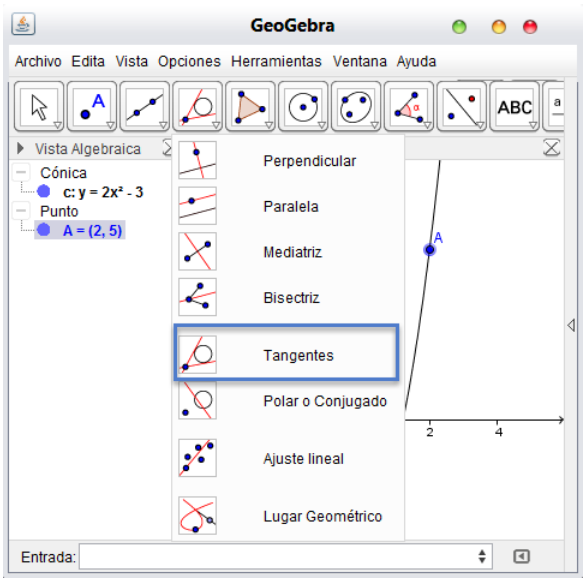
1. ingreso de la función mediante el comando **`y=2x^2-3`**



2. Ingreso del punto de tangencia mediante el comando **`(2,5)`**



3. Ingreso al menú de herramientas tangentes



4. Resultado final la ecuación de la recta es $y = 8x - 11$, con pendiente igual a 8

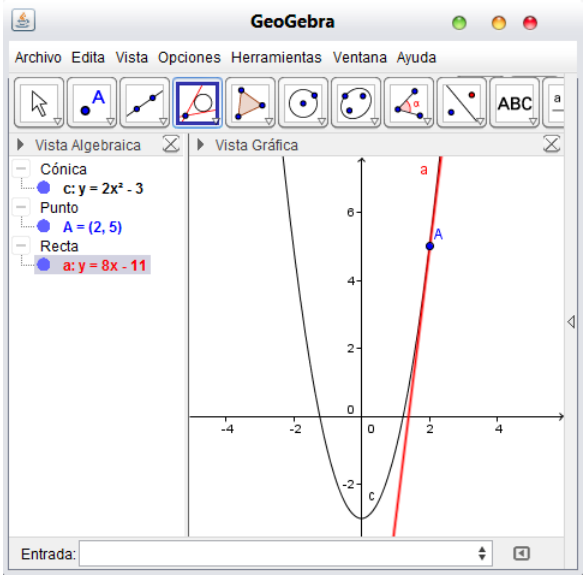
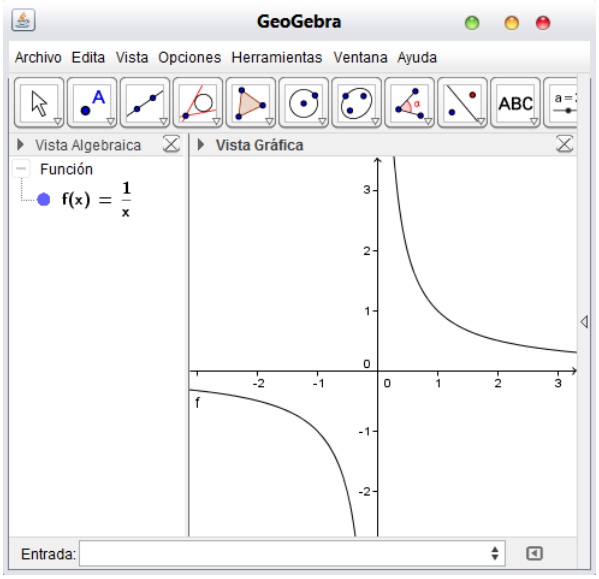


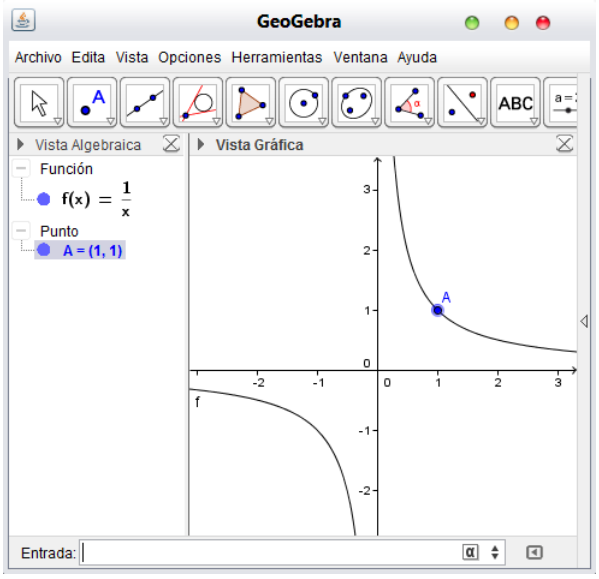
Figura 1.44: Proceso de solución tangentes segundo ejemplo

Pendiente y recta tangente de $y = \frac{1}{x}$ en $(1,1)$

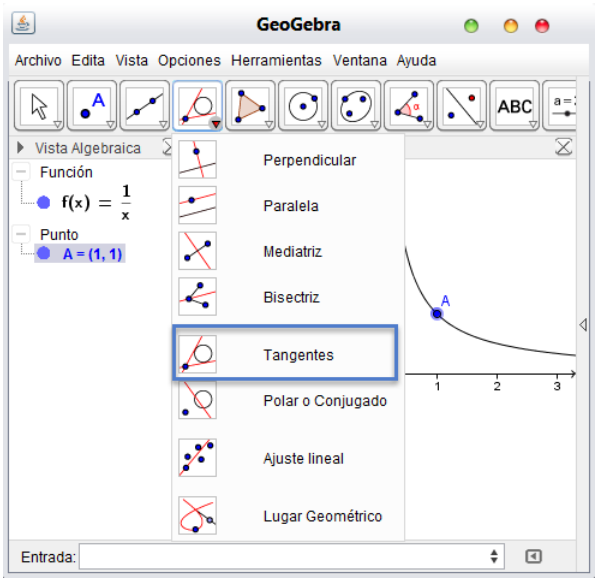
1. Ingreso de la función mediante el comando **`y=1/x`**



2. Ingreso del punto de tangencia mediante el comando **`(1,1)`**



3. Ingreso al menú de herramientas tangentes



4. Resultado final la ecuación de la recta es $y = -x + 2$, con pendiente igual a -1

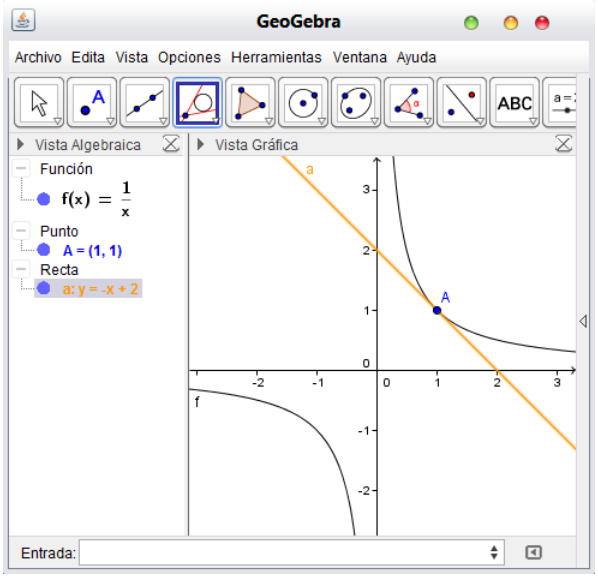
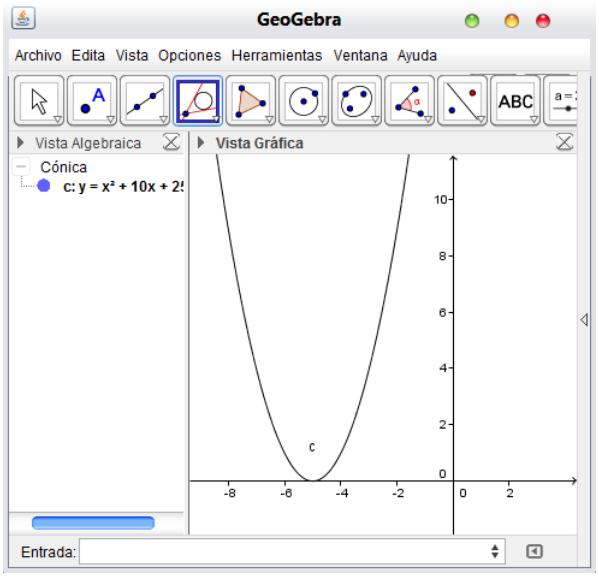


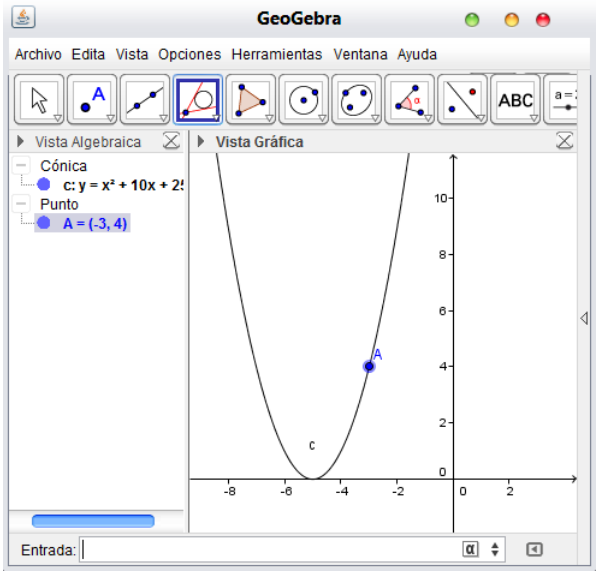
Figura 1.45: Proceso de solución tangentes tercer ejemplo

Pendiente y recta tangente de $y = x^2 + 10x + 25$ en $(-3, 4)$

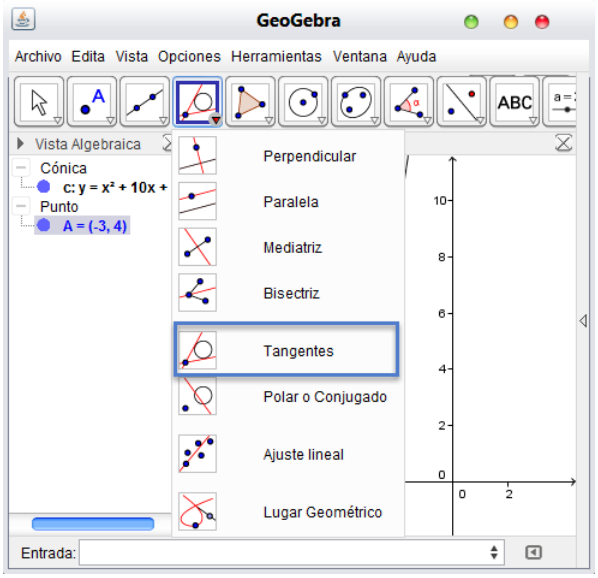
1. Ingreso de la función mediante el comando **`y=x^2+10x+25`**



2. Ingreso del punto de tangencia mediante el comando **`(-3,4)`**



3. Ingreso al menú de herramientas tangentes



4. Resultado final la ecuación de la recta es $y = 4x + 16$, con pendiente igual a 4

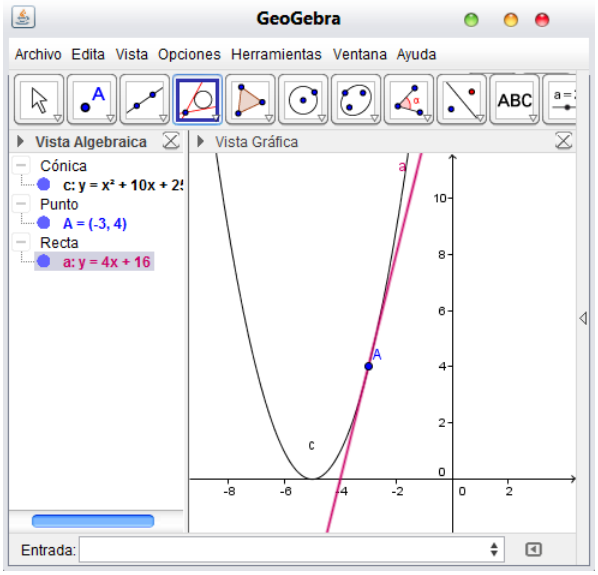


Figura 1.46: Proceso de solución tangentes cuarto ejemplo

Ejemplo 1.10

El tamaño de la población de cierto centro minero al tiempo t (medido en años) está dado por:

$$p(t) = 10000 + 1000t - 120t^2$$

Determine la tasa de crecimiento promedio entre cada par de tiempos

a) $t = 3$ y $t = 5$ años

b) $t = 3$ y $t = 4$ años

c) $t = 3$ y $t = 3\frac{1}{2}$ años

d) $t = 3$ y $t = 3\frac{1}{4}$ años

Solución:

Veremos la solución utilizando el programa wxMaxima:

Previamente según el enunciado se considera determinar la tasa de crecimiento promedio, esta tasa pedida es la tasa de cambio promedio o razón de cambio, el cual se utiliza con dicho nombre en aplicaciones a crecimiento y decrecimiento poblacional. Para la solución del ejemplo tenemos los siguientes pasos mediante la figura en el cual se tiene la solución de la parte **a)** que indicaremos paso a paso lo desarrollado:

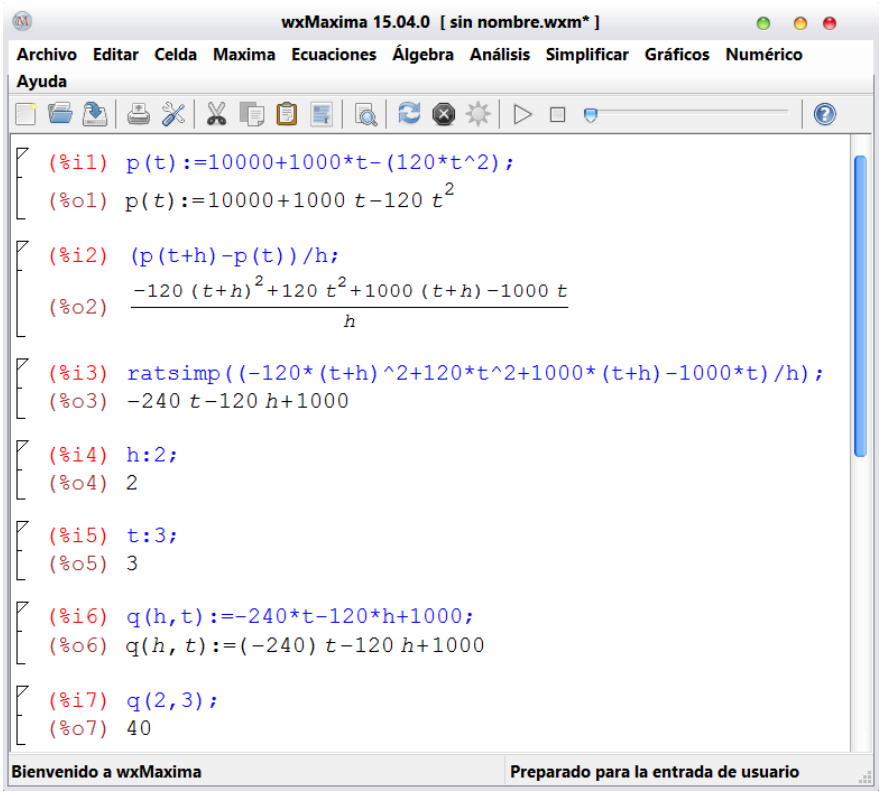


Figura 1.47: Proceso desarrollo de ejemplo tasa de crecimiento en wxMaxima

1. Ingresamos la función dada en el ejemplo que representa el tamaño de la población definida según el paso (%i1) luego presionamos las teclas de **mayúscula y enter** o (Shif- Enter) y obtenemos (%o1)

2. Como segundo paso se establece la tasa o razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ como la función es p(t) entonces la función $f = p$ y considerando $\Delta x = h$ se tiene la tasa en (%i2), cuyo resultado se obtiene en (%o2)

3. Puesto que el programa muestra en el segundo paso la tasa o razón de cambio sin simplificar para el tercer paso seleccionamos la salida (%o2) y utilizamos el menú simplificar y luego hacemos clic en simplificar expresión, con lo cual se obtiene la salida (%o3)

4. En este paso damos valores a las incógnitas h que es el incremento de 3 a 5 años tenemos un incremento de 2 años

5. En este paso ingresamos el tiempo t que corresponde al valor 3

6. En este paso definimos el resultado como una función $q(h,t)$ que representaría la tasa de cambio o razón de cambio, como se muestra en (%i6)

7. En este paso buscamos el resultado para $q(2,3)$ que representa la razón de cambio para un incremento de 2 y un tiempo inicial de 3, con lo cual se obtiene la salida (%o7) con un resultado igual a 40

Puesto que ya se ha definido la tasa o razón en base a todo lo anterior para encontrar la solución de la parte **b)** ingresamos q$(1,3)$ que indica un incremento de un año de $t = 3$ a $t = 4$ y el tiempo inicial $t = 3$, con lo que se obtiene un resultado igual a 160, para la parte **c)** el incremento será 0,5, y el tiempo inicial $t = 3$, para la parte **d)** el incremento es 0,25 y el tiempo inicial también es $t = 3$, los resultados se muestran en la figura siguiente:

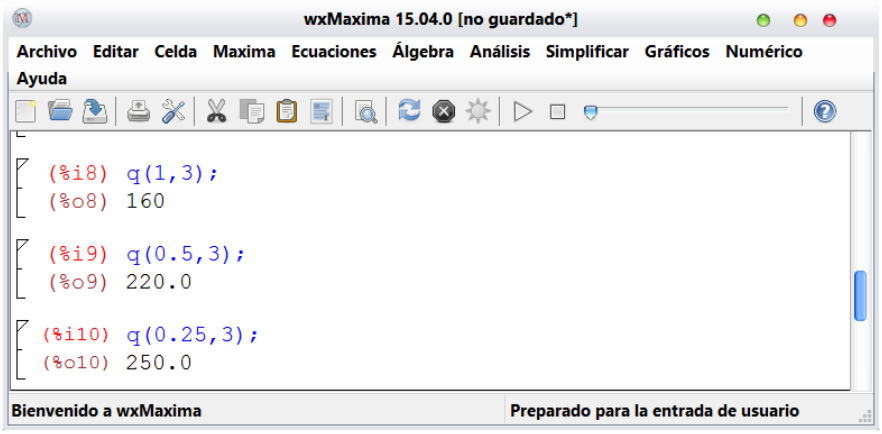


Figura 1.48: Resultados tasa de crecimiento **b)**, **c)** y **d)**

2 Funciones especiales

Se considera dos funciones especiales, la exponencial y logarítmica, puesto que tienen aplicación importante especialmente dentro de la administración y economía como en crecimientos y decrecimientos poblacionales, tasas de crecimiento económico, negocios y otras, es por ello que se considera solo estas dos funciones y cabe mencionar que en la matemática se tiene otras funciones que también se denominan especiales como por ejemplo la función máximo entero, función signo, entre otras.

2.1 Funciones exponenciales

Dentro del álgebra se tiene muchas funciones de entre ellas se consideran funciones del tipo $y = f(x)^{g(x)}$ de manera general, y considerando $f(x) = a$ como constante y $g(x) = x$ una función identidad se tiene $y = a^x$, a la cual se denomina función exponencial, veamos la definición de la función exponencial

Definición 2.1 Función exponencial

Una función con la forma

$$f(x) = b^x$$

donde $b > 0$, $b \neq 1$ y x cualquier número real, recibe el nombre de **función exponencial** de base b (Frank S. Budnick 1990).

Por otro lado tenemos otra definición:

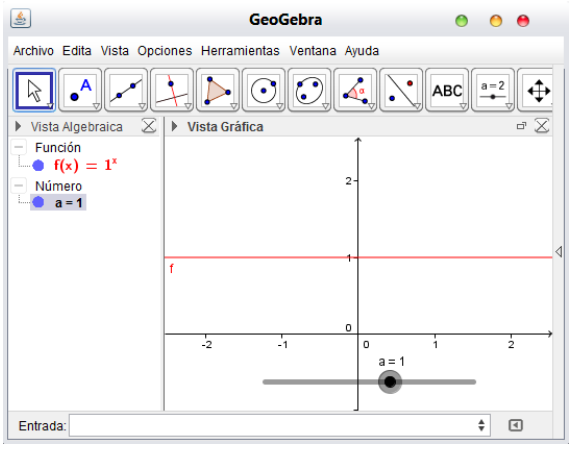
Definición 2.2 Función exponencial

La función inversa de $y = \ln(x)$ se llama **función exponencial neperiana** y se representa por $f(x) = exp(x)$ ó $f(x) = e^x$ y evidentemente por ser inversa se tiene: $f(x) \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, es monótona y creciente y verifica las siguientes identidades: $\log(exp(x)) = x$, $exp(log(x)) = x$, por lo tanto:

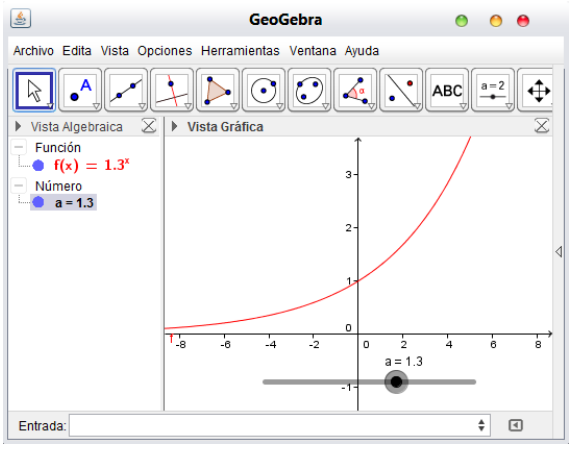
$$exp(0) = exp(\log(1)) = 1$$

(Luis Zegarra A. 2014).

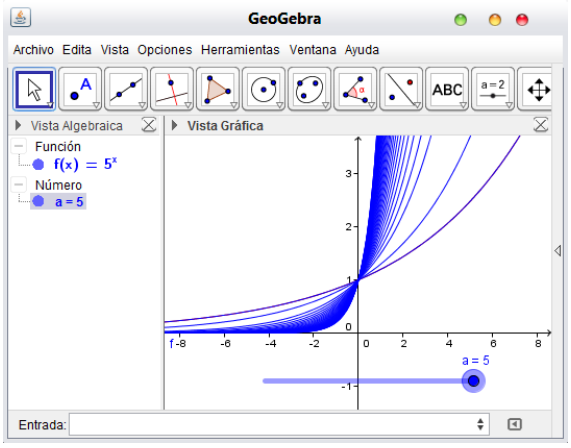
En referencia a las definiciones anteriores veamos algunos análisis de la función exponencial gráficamente en el programa GeoGebra.



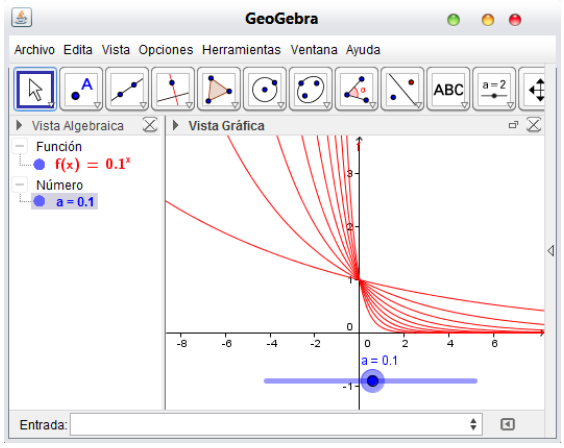
(a) Función exponencial con base $a = 1$



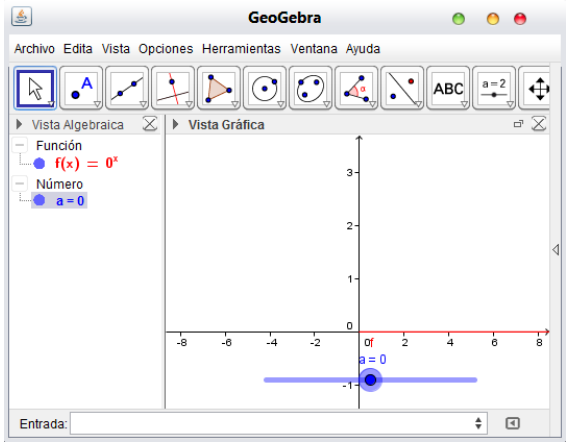
(b) Función exponencial con base $a > 1$



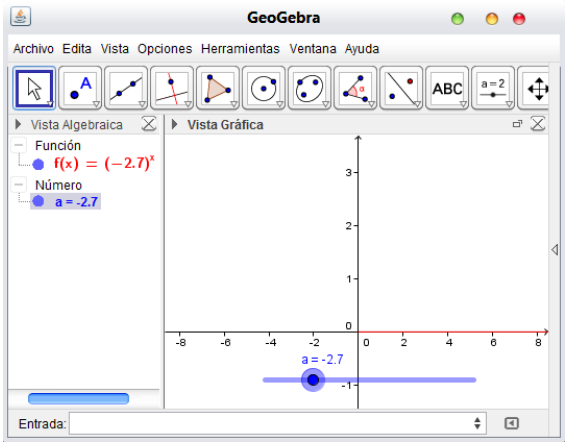
(c) Función exponencial con base $a > 1$



(d) Función exponencial con base $a < 1$



(e) Función exponencial con base $a = 0$



(f) Función exponencial con base $a < 0$

Figura 2.1: Función exponencial con variación de base en el programa GeoGebra

Vemos que en la definición de una función exponencial no se considera la base igual a 1 es porque según el gráfico **a)** se tiene una recta y no es la forma de la función exponencial, por otro lado toma la forma creciente

cuando la base es mayor a la unidad y decreciente cuando la base es menor que la unidad lo que se puede ver en las figuras **b)**, **c)** y **d)**. También vemos que para una base menor o igual a cero pierde las características de función exponencial como se muestra en las gráficas **e)** y **f)**

Características de las funciones exponenciales

Función $f(x) = b^x$, donde $b > 1$

I Se define la función para todos los valores de x, $x \in \mathbb{R}$. El dominio de f es el conjunto de números reales, $Dom(f) = \mathbb{R}$

II La gráfica de f cae por completo sobre el eje x (el rango es el conjunto de números reales positivos $Rang(f) = \langle 0, \infty \rangle$).

III La gráfica de f es asintótica para el eje x, la asíntota es el eje x, Esto es, el valor de y se aproxima pero nunca toma el valor de 0 conforme x se aproxima al menos infinito.

IV La intersección con el eje y es el punto $(0,1)$.

V y es una función creciente de x; es decir, sobre el dominio de la función cualquier incremento de x se acompaña de un aumento de y. De modo más preciso, esta propiedad sugiere que para $x_1 < x_2, \quad f(x_1) < f(x_2)$.

VI Cuánto más grande es la magnitud de la base **b**, mayor es el índice de incremento en $f(x)$ conforme aumenta el valor de x

Fuente. Adaptado de Frank S. Budnick 1990

Características de las funciones exponenciales

Función $f(x) = b^x$, donde $0 < b < 1$

I Se define la función para todos los valores de x, $x \in \mathbb{R}$. El dominio de f es el conjunto de números reales, $Dom(f) = \mathbb{R}$

II La gráfica de f cae por completo sobre el eje x (el rango es el conjunto de números reales positivos $Rang(f) = \langle 0, \infty \rangle$).

III La gráfica de f es asintótica para el eje x, la asíntota es el eje x, Esto es, el valor de y se aproxima pero nunca toma el valor de 0 conforme x se aproxima al infinito.

IV La intersección con el eje y es el punto $(0,1)$.

V y es una función decreciente de x; es decir, sobre el dominio de la función cualquier incremento de x se acompaña de un decremento de y. De modo más preciso, esta propiedad sugiere que para $x_1 < x_2, \quad f(x_1) > f(x_2)$.

VI Cuánto más pequeña es la magnitud de la base **b**, mayor es el índice de decremento en $f(x)$ conforme aumenta el valor de x

Fuente. Adaptado de Frank S. Budnick 1990

A continuación veamos la aplicación de la función exponencial

Ejemplo 2.1 **Proceso de crecimiento exponencial: población**

El proceso de crecimiento exponencial: población se caracteriza por un incremento porcentual constante en el valor con el paso del tiempo. Este proceso se describe mediante la función general

$$V = f(t)$$

o también

$$V = V_0 e^{kt}$$

Donde V es el valor de la función en el momento t, V_0 es el valor de la función en $t = 0$, k es el índice de crecimiento porcentual y t es el tiempo medido en las unidades apropiadas (horas, días, semanas, años, etcétera). La población de un país era de 100 millones de habitantes en 1970. Desde esa época se ha incrementado exponencialmente con un índice constante de 4 por ciento por año. ¿Cuál es la función que estima el tamaño de la población **P** (en millones de habitantes), proyecte la población del país en 1995?

Solución:

La función de crecimiento poblacional estará representada como $P = 100e^{0,04t}$, esto según a la función general de crecimiento donde $V = P$ para el caso de población, donde:

- Población inicial es 100 millones de acuerdo a dato
- Porcentaje de crecimiento 0.04 que es el 4 %
- y t para cualquier tiempo

Ademas debemos considerar que $t = 0$ para el año de 1970, entonces para el año de 1995 el t equivale a 25, es decir; pasaron 25 años, veamos el cálculo numérico de la población en 1995 y su gráfica correspondiente en el programa wxMaxima

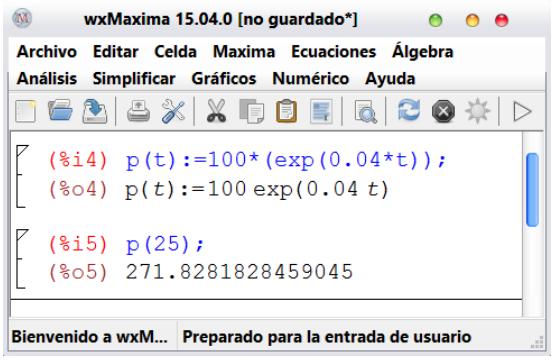


Figura 2.2: Resultado proceso de crecimiento exponencial: población

Según el resultado la población en el año 1995 tendrá 271.83 millones de habitantes, la gráfico de crecimiento poblacional se tiene a continuación:

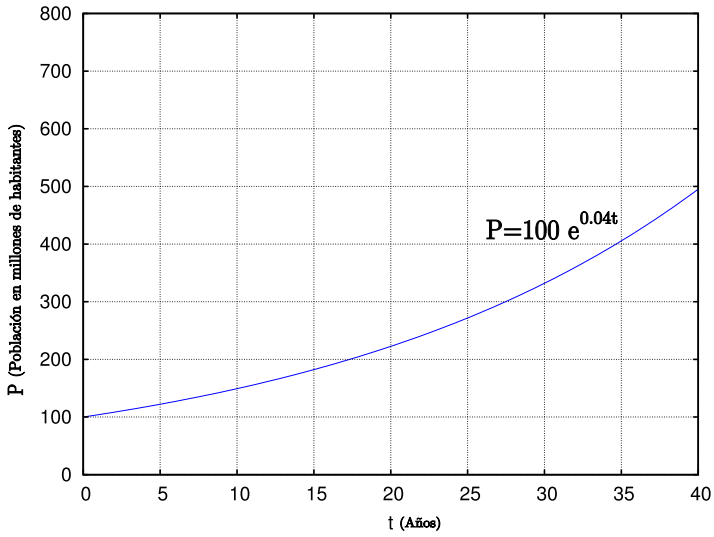


Figura 2.3: Gráfica proceso de crecimiento exponencial: población

2.2 Funciones logarítmicas

La representación de una función logarítmica se puede obtener simplemente intercambiando las variables de una función exponencial en el cual aplicando propiedades de logarítmos se tiene una representación siguiente:

$$y = \log_a x \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

Para logaritmos tenemos la siguiente definición:

Definición 2.3 Función logarítmica

Una **Función Logarítmica** de base b tiene la forma:

$$y = f(x) = \log_b u(x)$$

donde $u(x) > 0, \quad b > 0, \quad$ pero $b \neq 1$

(Frank S. Budnick 1990).

Definición 2.4 Función logarítmica

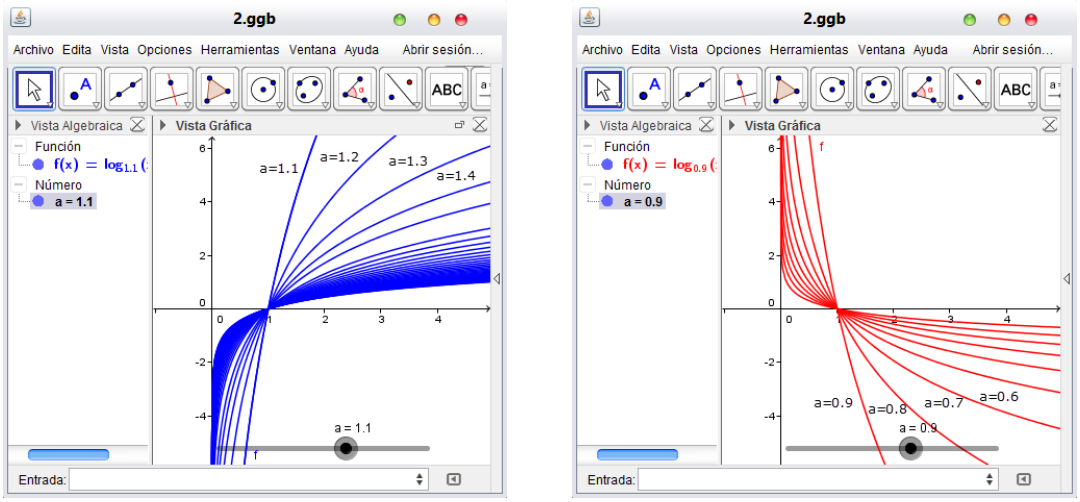
La **Función Logarítmica**:

$$f(x) = \log_a(x)$$

donde la base a es positiva constante, es la función inversa de la función exponencial, cuyo dominio es $\langle 0, \infty \rangle$, y rango es el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$

(James, Stewart 2001).

En referencia a las definiciones anteriores veamos mediante el programa GeoGebra el análisis de la función logaritmo



(a) Función logaritmo con base $a > 1$ (b) Función exponencial con base $0 < a < 1$

Figura 2.4: Función logaritmo con variación de base en el programa GeoGebra

Según los resultados para una base $a = 1$ la función logaritmo no está definida, para valores estrictamente mayores a la unidad tenemos los resultados en la figura **a)**, y para valores entre cero y la unidad tenemos la figura **b)**, según la variación de la base, si la base es negativa la función logaritmo no está definida.
Por otro lado analizando la gráfica vemos que en cualquiera de los casos **a)** o **b)** la gráfica de la función logaritmo es asintótica cuya asíntota es el eje vertical **Y**.
La intersección con el eje de las abscisas es el punto $(1,0)$
También se observa que para la gráfica-parte **a)** la gráfica de la función logaritmo es creciente a medida que crece el valor de **x** y en la gráfica-parte **b)** se observa que la función logaritmo es decreciente a medida que crece el valor de **x**.
Y por último se verifica según la segunda definición que el dominio es la parte positiva del eje **X** y el rango es todo el eje **Y** o los reales.

Para el análisis de la función se utilizó el siguiente proceso en el programa GeoGebra.

Primer Paso: En el programa GeoGebra hacemos clic en el icono deslizador de la barra de herramientas así como se muestra en la figura.

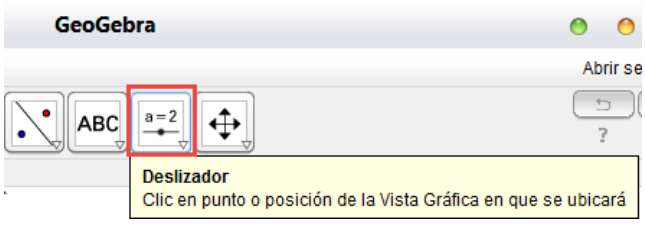


Figura 2.5: Herramienta deslizador en GeoGebra

Segundo Paso: haciendo clic en el icono deslizador luego hacemos nuevamente clic en el espacio de trabajo o en la vista gráfica del programa GeoGebra y se tendrá el menú de opciones emergente como se muestra en la gráfica adjunta.

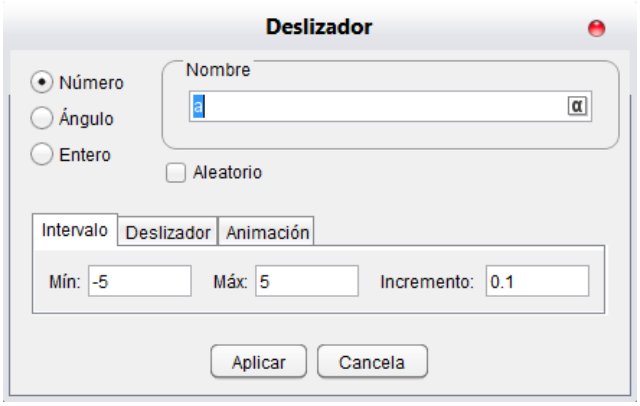


Figura 2.6: Menú de opciones de la herramienta deslizador en GeoGebra

Tercer Paso: en las opciones dejamos por defecto la variación de **a** entre -5 y 5 y hacemos clic en aplicar y se tendrá el resultado como se muestra en la gráfica adjunta.

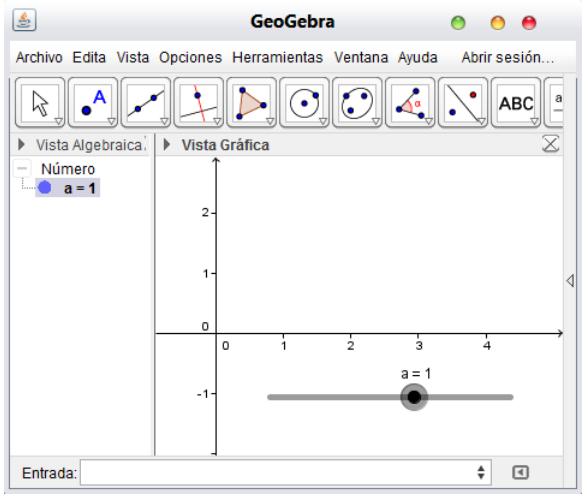


Figura 2.7: Resultado herramienta deslizador en GeoGebra

Cuarto Paso: a continuación ingresamos la función logaritmo según el comando siguiente **y=log(a,x)** así como se muestra en la imagen adjunta.

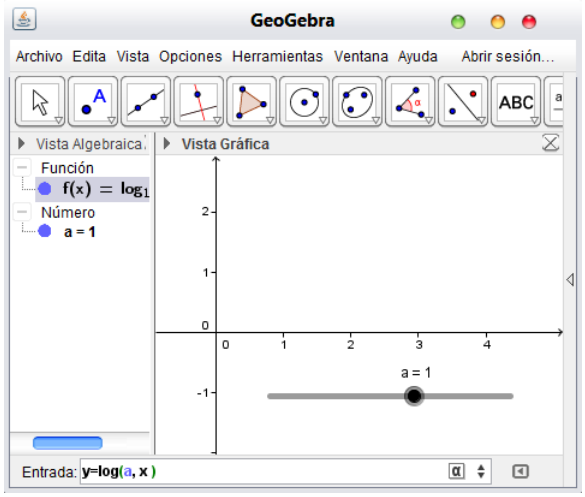


Figura 2.8: Ingreso de la función logaritmo en GeoGebra

Finalmente si hacemos clic en el deslizador creado y hacemos variar el valor de **a** veremos las gráficas de la función logaritmo de la Figura 2.4

Ejemplo 2.2

(**Administración del bienestar**) Un organismo de bienestar estatal de reciente creación intenta determinar el número de analistas que se deben contratar para procesar solicitudes de bienestar. Los expertos en eficiencia estima que el costo **C** de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. Específicamente, la función de costo es:

$$C = f(x) = 0{,}001x^2 - 5\ln x + 60$$

Dada esta función logarítmica:

a) Determine el costo por solicitud si se usan 20 analistas.

b) Determine el costo si se emplean 50 analistas.

c) Trace la función.

Solución:
Veremos la solución utilizando el programa Sage:

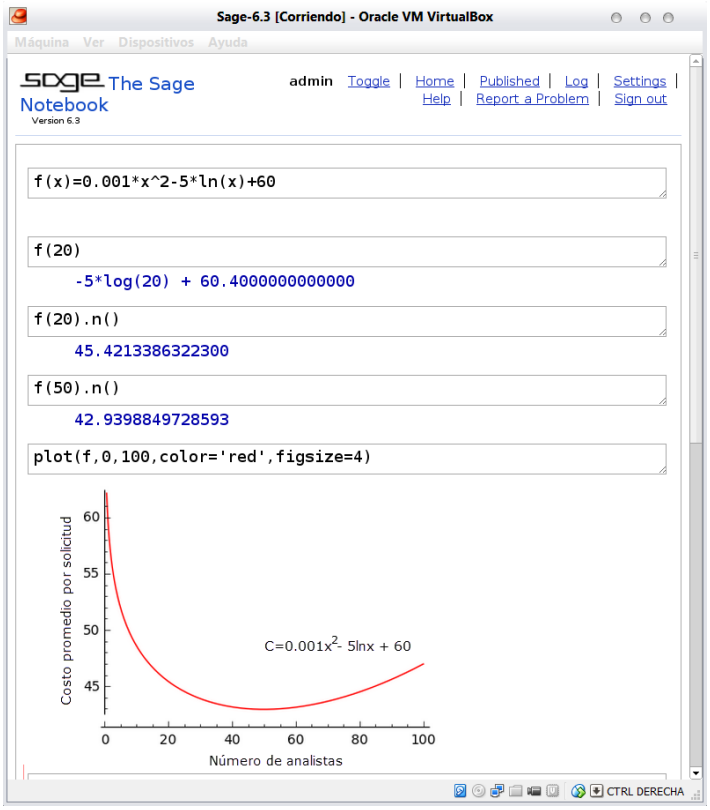


Figura 2.9: Resultado ejemplo administración del bienestar en Sage

La solución del problema es mediante el programa **Sage** como se aprecia en la Figura 2.9, para dar solución se consideró los siguientes pasos:

- ✓ En primer lugar consideramos el ingreso de la función costo según el siguiente comando **`C=f(x)=0.001*x^2-5*\ln x + 60`**
- ✓ Luego de ya estar definida la función costo promedio se requiere hallar el valor del costo para 20 analistas en consecuencia ingresamos **f(20)** para encontrar el resultado, según la figura vemos que no tenemos una respuesta numérica, por lo tanto ingresamos el comando **n()**, es decir **f(20).n()**, con lo cual obtenemos el resultado 45,42, en conclusión el costo por solicitud si se usan 20 analistas es 45,42, con lo que queda resuelto la parte **a)** del problema.
- ✓ Análogamente al anterior paso se procede para encontrar el resultado de la parte **b)**, considerando el ingreso del siguiente comando **f(50).n()**, según al resultado del programa Sage concluimos que el costo por solicitud si se emplean 50 analistas es 42,94, con lo que queda resuelto la parte **b)** del problema.
- ✓ Para obtener el gráfico de la función costo, utilizamos el siguiente comando **`plot(f,0,100,color='red',figsize=4)`**, donde f es la función a graficar en el intervalo cero a cien, la gráfica por defecto resulta de color azul en este caso saldrá de color rojo según se indica el comando, adicionalmente para obtener un gráfico de tamaño adecuado se utiliza el comando **figsize**, con lo que obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 2.9.

3 Derivadas

En el primer capítulo se hace referencia a las tasas de cambio promedio, también se vio la tasa de cambio instantánea que precisamente viene a ser la derivada de la cual trata este capítulo, la derivada es un límite que afecta a un proceso de cambio de una variable cuando cambia otra, la derivada tiene muchas aplicaciones en el campo de la matemáticas, físicas, economía y otras, por ejemplo podemos citar en la matemática aplicaciones de rectas tangentes, razón de cambio, en la física tenemos las velocidades y en la economía las tasas de cambio instantáneas, procesos marginales. a continuación veamos la definición de la derivada:

Definición 3.1 Derivada

La función f es **derivable en a** si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existe}$$

En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de **derivada de f en a**. (Decimos también que f es **derivable** si f es derivable en a para todo a del dominio de f.)

(Spivak, Michael 1996).

Definición 3.2 Derivada

La **derivada** de una función f es otra función f' (léase f prima) cuyo valor en cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(Purcell, Edwin J. 2007).

Para apreciar de manera geométrica la derivada de una función podemos hacer referencia al software **Derivada de una función en un punto por Jordi Lagares Roset. 2000** en la que podemos realizar los cambios de la posición del incremento y tener la derivada en cualquier punto como la tangente de la función, a continuación se tiene las figuras que muestran lo considerado.

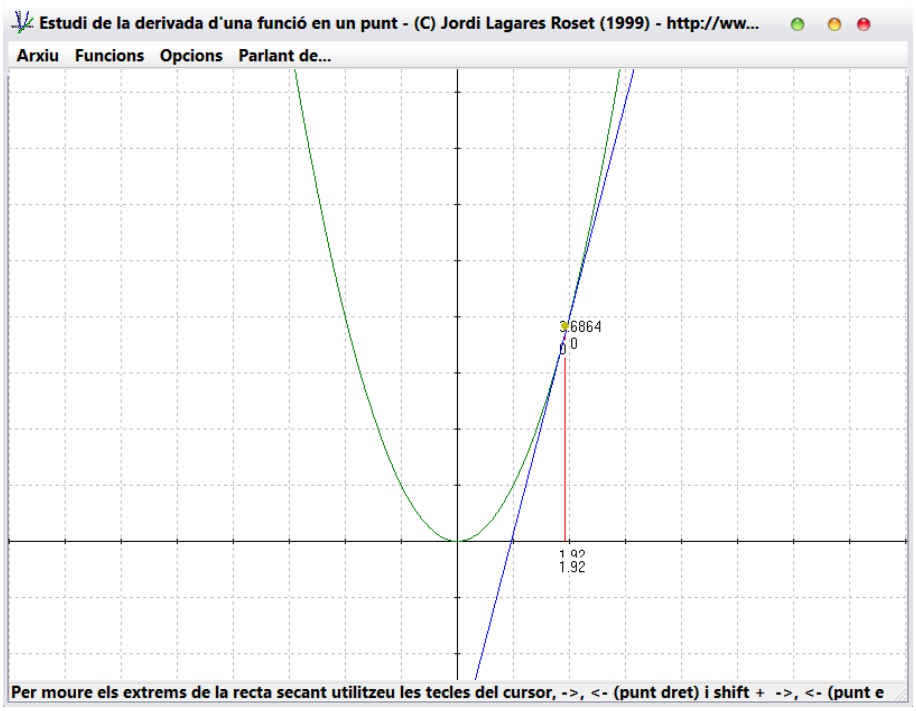


Figura 3.1: Derivada de una función

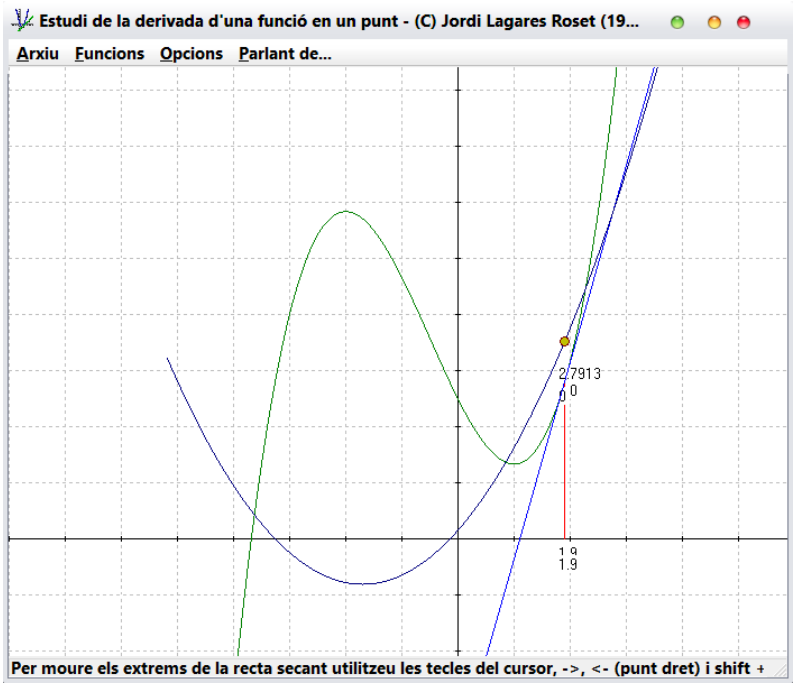


Figura 3.2: Derivada de una función

En las figuras **(3.2)** se aprecia que también se muestra la función derivada que es de segundo grado, por otro lado este software también tiene resultados sobre velocidades promedio e instantáneas para ello es necesario

dirigirse al menú **Funcions** de la barra de menú del programa.

3.1 Reglas de derivación

Para el desarrollo de las derivadas en el caso sea manual es necesario tener en cuenta las reglas de derivación, que vienen a ser fórmulas que ayudan a obtener el resultado de una derivada, en nuestro caso al desarrollar los ejemplos el software que utilicemos contempla estas fórmulas dentro de su desarrollo, cabe indicar que en los software libres que se utilizan es necesario conocer los comandos de ingreso de las funciones, es recomendable revisar el manual de cada software aplicado para ampliar el conocimiento de éste, a continuación veamos dichas reglas de derivación elementales en el cálculo ó análisis matemático.

Reglas de derivación

- **Derivada de una función constante:**
  si $f(x) = k$, entonces: $f'(x) = 0$
- **Derivada de una potencia:**
  si $f(x) = x^n$, entonces: $f'(x) = nx^{n-1}$
- **Derivada del producto por un escalar:**
  $\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$
- **Derivada de una suma de funciones:**
  $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$
- **Derivada de un producto:**
  $\frac{d}{dx}[f(x)\times g(x)] = f(x)\times g'(x)+g(x)\times f'(x)$
- **Derivada de una función elevada a una potencia:**
  $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
- **Derivada de un cociente:**
  $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x)\neq 0$
- **Derivada de una composición:**
  $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
- **Derivada del valor absoluto:**
  $\frac{d}{dx}(|u|) = \frac{u}{|u|}\frac{du}{dx}$

(Thomas Jr., George B. 2010).

Al igual que con los límites, los software nos ayuda a encontrar las derivadas de manera rápida y sencilla como veremos en los siguientes ejemplos:

3.2 Ejemplos

Solución de derivadas usando el programa wxMaxima

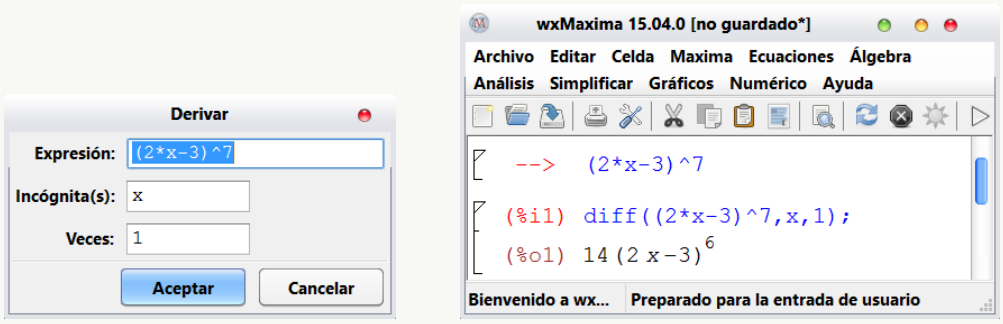
Ejemplo 3.1

Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = (2x-3)^7$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo ingresamos el comando `(2*x-3)^7` a continuación ingresamos al menú **Análisis>Derivar** note que en la ventana emergente aparece ya la función ingresada, si no se ingresa la función inicialmente usted la puede ingresar directamente en esta ventana, por defecto dejamos "x" que es la variable con respecto a la que se deriva y también dejamos el contador en uno que es la primera derivada, a continuación presionando aceptar obtenemos el resultado como se muestra en la figura adjunta



(a) Ingreso de la función

(b) Resultado de la derivada de la función

Figura 3.3: Derivada de una función en wxMaxima

Ejemplo 3.2

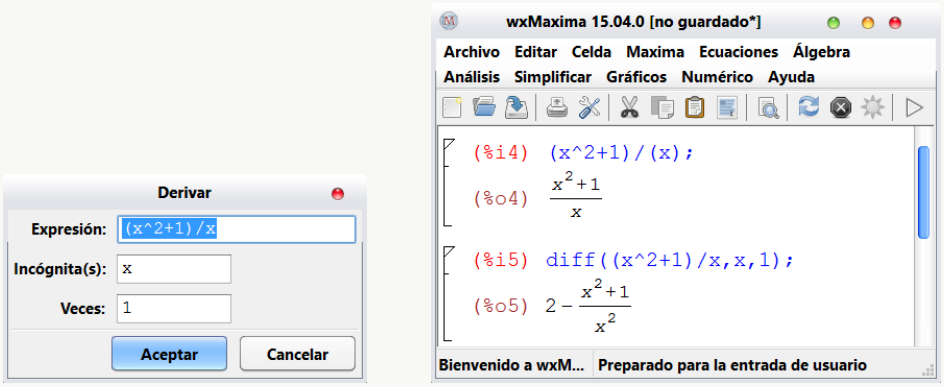
Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo ingresamos el comando `(x^2+1)/x` seleccionando la ecuación a continuación ingresamos al menú **Análisis>Derivar**, por defecto dejamos "x" que es la variable con respecto a la que se deriva y también dejamos el contador en uno que es la primera derivada, a continuación presionando aceptar obtenemos el resultado como se muestra en la figura adjunta

Ejemplo 3.2 **(Continuación).**



(a) Ingreso de la función (b) Resultado de la derivada de la función

Figura 3.4: Derivada de una función en wxMaxima

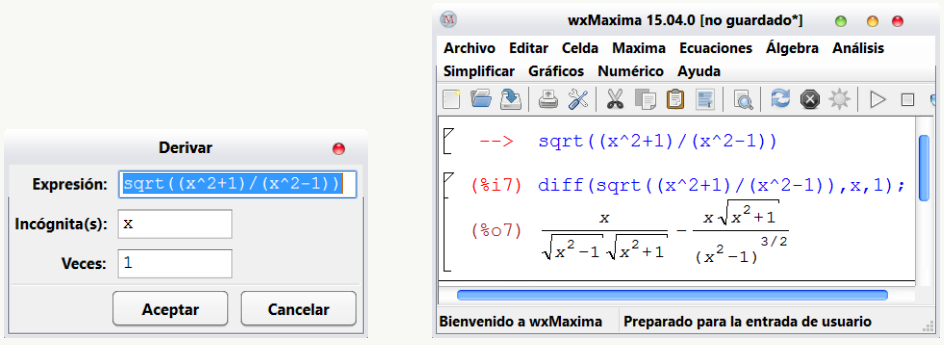
Ejemplo 3.3

Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo ingresamos el comando **`(sqrt((x^2+1)/(x^2-1))`** seleccionando la función a continuación ingresamos al menú **Análisis>Derivar** luego análogamente al proceso anterior, por defecto dejamos "x" que es la variable con respecto a la que se deriva y también dejamos el contador en uno que es la primera derivada, a continuación presionando aceptar y así obtenemos el resultado como se muestra en la figura adjunta



(a) Ingreso de la función (b) Resultado de la derivada de la función

Figura 3.5: Derivada de una función en wxMaxima

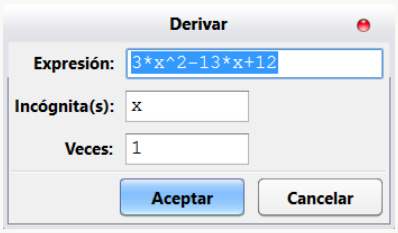
Ejemplo 3.4

Obtener la derivada $f'(x)$ si se tiene la siguiente función:

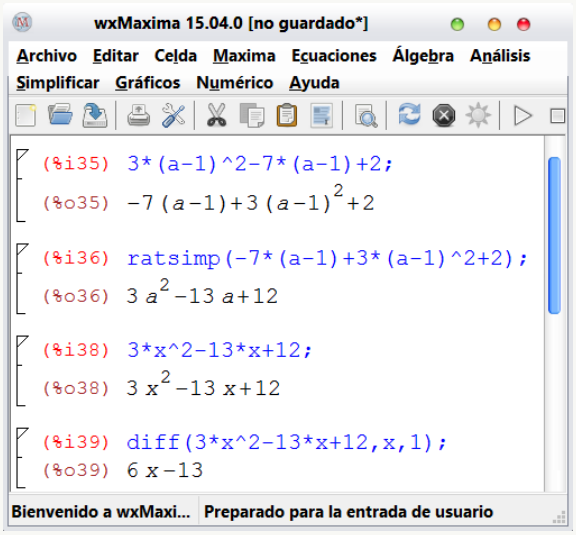
$$f(x+1) = 3x^2 - 7x + 2$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo en primer lugar tenemos que encontrar cuál es la función $f(x)$, para este caso trabajaremos con una variable "a", siendo $x+1=a$ la variable "x" tomara valores $a-1$ entonces ingresamos la función $f(a)$ mediante el siguiente comando `f(a)=3*(a-1)^2-7*(a-1)+2` a continuación ingresamos al menú **Simplificar>Simplificar expresión** luego se obtiene la siguiente función $f(a) = 3a^2 - 13a + 12$ es función corresponde para todo valor "a" en todo caso también para un valor "x" entonces se tendría la nueva función $f(x)$ como $f(x) = 3x^2 - 13x + 12$, a continuación ingresamos al menú **Análisis>Derivar**, y en la ventana emergente, por defecto dejamos x que es la variable con respecto a la que se deriva y también dejamos el contador en uno que es la primera derivada, a continuación presionando aceptar y así obtenemos el resultado como se muestra en la figura adjunta.



(a) Ingreso de la función



(b) Resultado de la derivada de la función

Figura 3.6: Derivada de una función en wxMaxima

Para dar solución de manera mas rápida, podemos directamente encontrar la derivada de la función inicialmente ingresada en función de la nueva variable a y así se tendría el resultado.

Solución de derivadas usando el programa Sage

Ejemplo 3.5

Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = xe^x$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo en el programa Sage ingresamos la función mediante el comando **`f(x)=x*e^x`** a continuación, luego para derivar utilizamos el siguiente comando **`diff`**, en consecuencia ingresamos en la linea de entrada lo siguiente **`diff(x*e^x)`**, de esta manera obtenemos la derivada cuyo resultado es $(\mathbf{xe^x + e^x})$, a continuación se puede apreciar el resultado y adicionalmente las gráficas de la función inicial y la gráfica de la función derivada en el programa Sage.

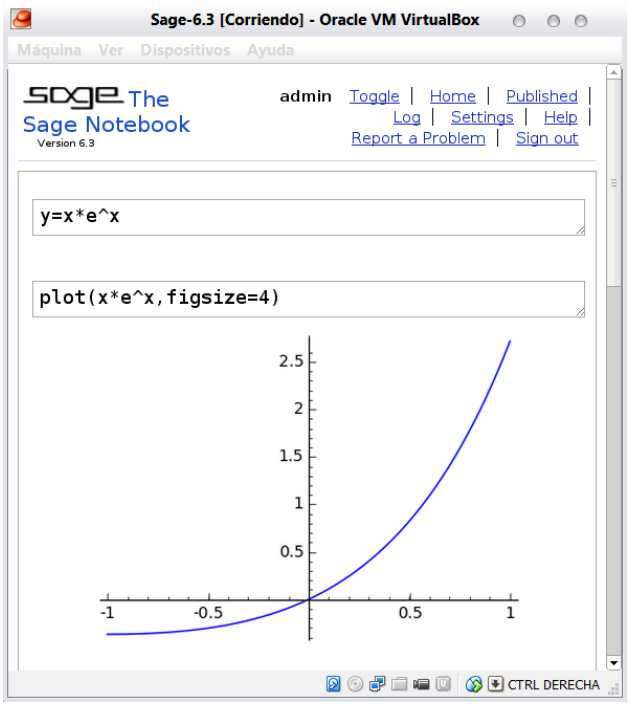


Figura 3.7: Gráfica de una función en Sage

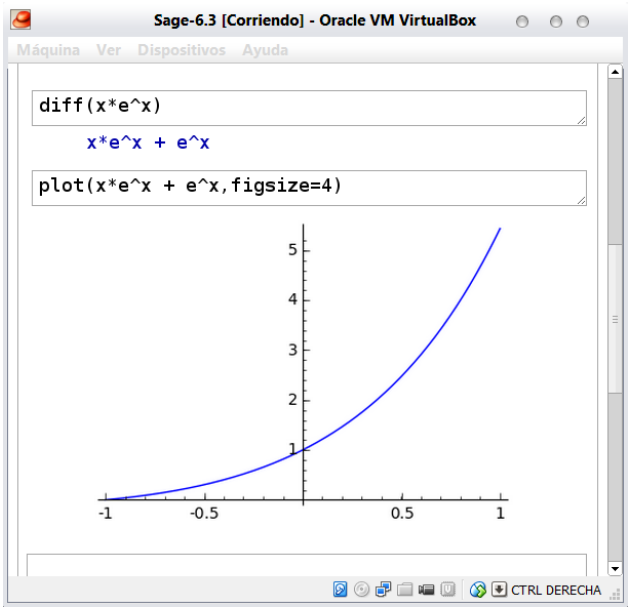


Figura 3.8: Derivada de una función en Sage

Ejemplo 3.6

Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = e^{-0,3x} cos(4x)$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo en el programa Sage ingresamos la función mediante el comando **`f(x)=exp(-0.3*x)+cos(4*x)`** a continuación, luego para derivar utilizamos el siguiente comando **`diff`**, en consecuencia ingresamos en la linea de entrada lo siguiente **`diff(f(x),x,1)`**, en éste comando se da énfasis en función a la variable de derivación y el orden de derivada, de esta manera obtenemos la derivada cuyo resultado es $(-\mathbf{0,3cos(4x)e^{-0,3x} - 4e^{-0,3x}}\,\mathbf{sen(4x)})$, a continuación se puede apreciar el resultado y adicionalmente las gráficas de la función inicial y la gráfica de la función derivada en el programa Sage.

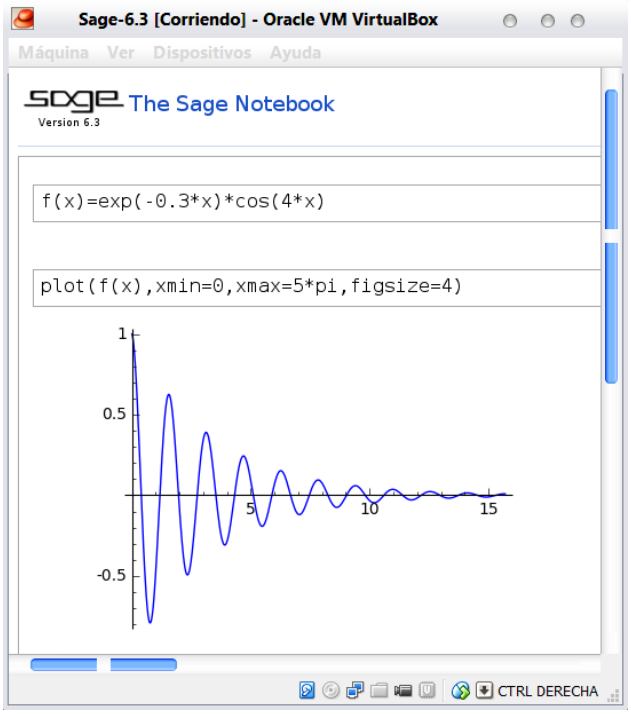


Figura 3.9: Gráfica de una función en Sage

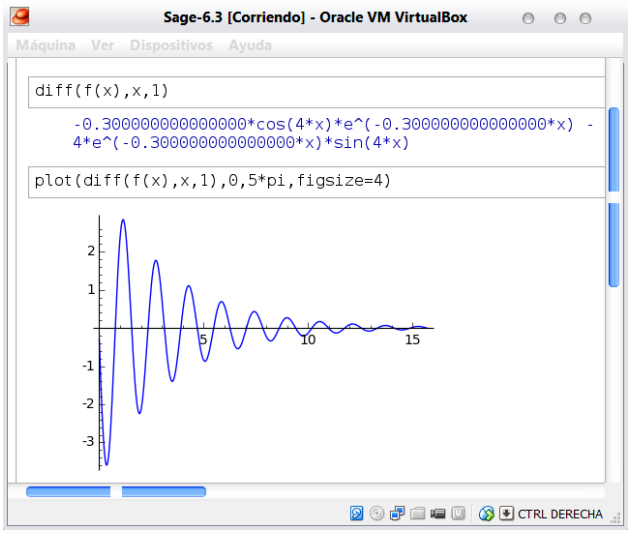


Figura 3.10: Derivada de una función en Sage

Ejemplo 3.7

Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = \sqrt{x-1}$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo ingresamos la función mediante el comando **`f(x)=sqrt(x-1)`** a continuación, para derivar utilizamos el siguiente comando en la linea de entrada **`diff(sqrt(x-1)`**, de esta manera obtenemos la derivada cuyo resultado es $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{1})}}$, a continuación se puede apreciar el resultado y adicionalmente las gráficas de la función inicial y la gráfica de la función derivada.

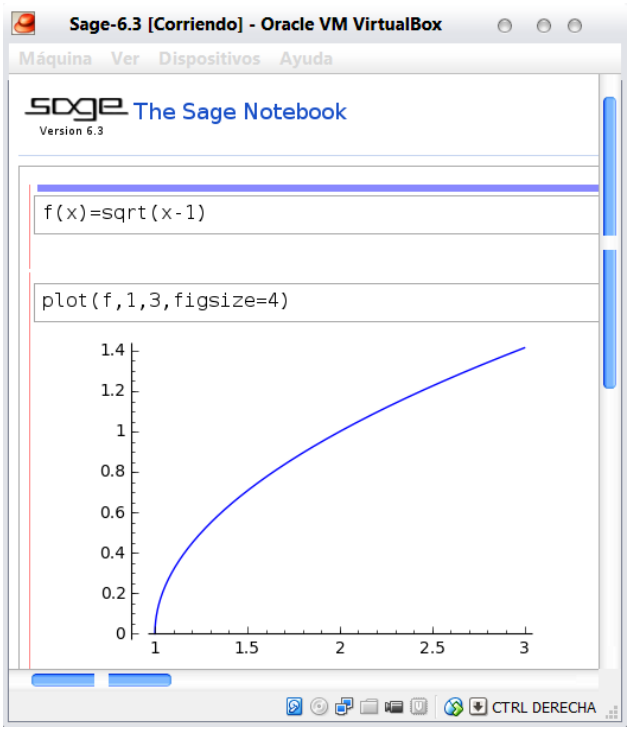


Figura 3.11: Gráfica de una función en Sage

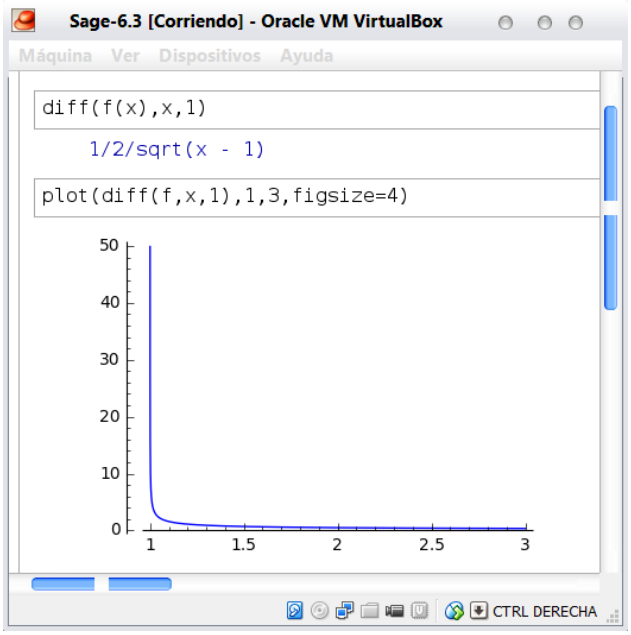


Figura 3.12: Derivada de una función en Sage

Ejemplo 3.8

Obtener la derivada de la siguiente función:

$$y = -\frac{\text{sen}(x) + \cos(x)}{e^x}$$

Solución:

Para dar solución al ejemplo ingresamos la función mediante el comando siguiente: `y=-(sin(x)+cos(x))/(e^x)` a continuación, para derivar utilizamos el siguiente comando en la linea de entrada `diff(y)`, de esta manera obtenemos la derivada cuyo resultado es $\mathbf{y'} = (\mathbf{cos(x)} + \mathbf{sin(x)})\mathbf{e}^{(-\mathbf{x})} - (\mathbf{cos(x)} - \mathbf{sin(x)})\mathbf{e}^{(-\mathbf{x})}$, a continuación se puede apreciar el resultado y adicionalmente las gráficas de la función inicial y la gráfica de la función derivada.

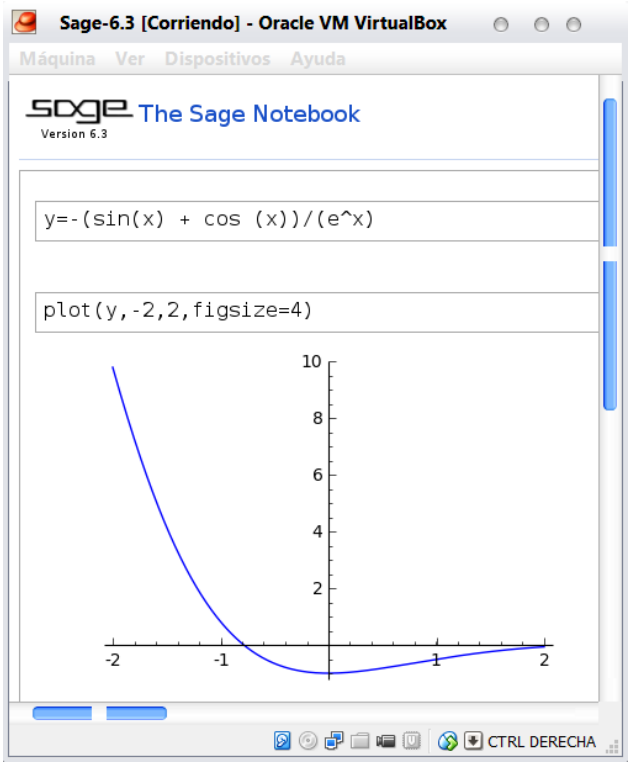


Figura 3.13: Gráfica de una función en Sage

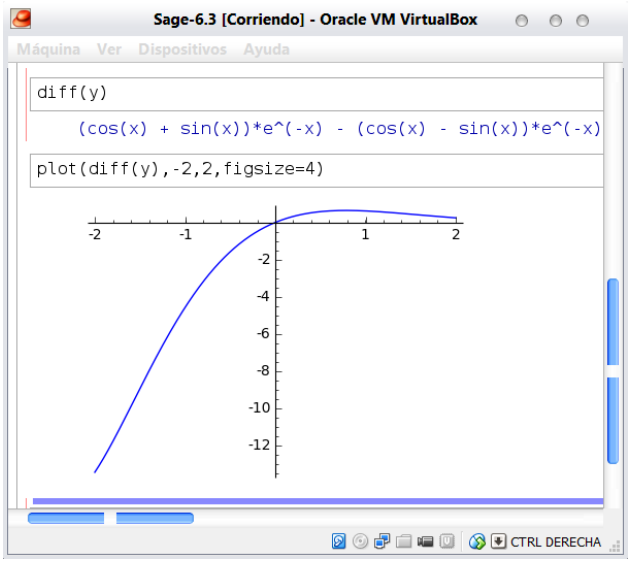


Figura 3.14: Derivada de una función en Sage

3.3 Derivadas de orden superior

La derivada de orden superior consiste en desarrollar nuevamente la derivada de una función la cual dará como resultado otra función en algunos casos es probable obtener la misma función, la importancia de obtener una segunda, tercera u otro orden de derivación se basa en la necesidad de las aplicaciones como por ejemplo en la economía es necesaria una segunda derivada para el análisis del aumento o disminución del costo marginal (Se hablará del costo marginal con detalle más adelante en la aplicación correspondiente con las integrales definidas). Para la notación de una segunda, tercera u otro grado de derivación expresamos de diferentes formas como se puede apreciar en la siguiente tabla:

Tabla 3.1: Notaciones de derivadas de orden superior

Notación y orden de derivadas				
Derivada de primer orden o primera derivada	y'	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$
Derivada de segundo orden o segunda derivada	y''	$y^{(2)}$	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Derivada de tercer orden o tercera derivada	y'''	$y^{(3)}$	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Derivada de n-ésimo orden o n-ésima derivada	$y^{(n)}$	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Nota. Fuente: Elaboración basada en:. Fundamentos del análisis matemático (E. Pozniak, V. Llín (1991)).

Ejemplo 3.9

Encontrar la derivada de quinto grado de la función $f(x) = e^{2x}$

Solución:

Veremos la solución utilizando el programa GeoGebra:

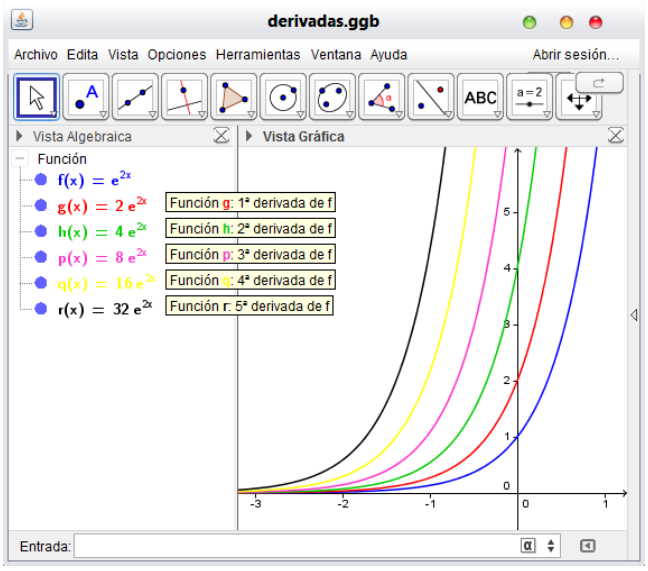


Figura 3.15: Derivadas de grado 1-5 de: $\mathbf{y = e^{2x}}$

Desarrollando las derivadas de primer a quinto grado en el programa GeoGebra según se ve en la Figura 3.15 tenemos las derivadas de la función dada, ingresando el comando siguiente: **`Derivada[<Función>, <Número(orden de la derivada)>]`**, en la que se considera la función e^{2x} y para cada derivada ingresamos 1 a 5, podemos considerar solo la quinta derivada que nos pide, sin embargo, podemos apreciar cada derivada y su gráfica correspondiente. Para la solución del presente ejemplo simplemente se considera la derivada de quinto grado que estaría dada mediante la función $r(x) = 32e^{2x}$.

Ejemplo 3.10

Encontrar la derivada de n-ésimo grado de la función $f(x) = e^{2x}$

Solución:

Veremos la solución utilizando el programa GeoGebra:

En base al ejemplo anterior y en referencia a la Figura 3.15, podemos considerar seguir derivando, pero este proceso no sería viable, el objetivo es generalizar el resultado como a continuación se muestra:

- ✓ Primera derivada $f(x) = 2e^{2x}$ se puede considerar $f(x) = 2^1 e^{2x}$
- ✓ Segunda derivada $f(x) = 4e^{2x}$ se puede considerar $f(x) = 2^2 e^{2x}$
- ✓ Tercera derivada $f(x) = 8e^{2x}$ se puede considerar $f(x) = 2^3 e^{2x}$
- ✓ Cuarta derivada $f(x) = 16e^{2x}$ se puede considerar $f(x) = 2^4 e^{2x}$
- ✓ Quinta derivada $f(x) = 32e^{2x}$ se puede considerar $f(x) = 2^5 e^{2x}$

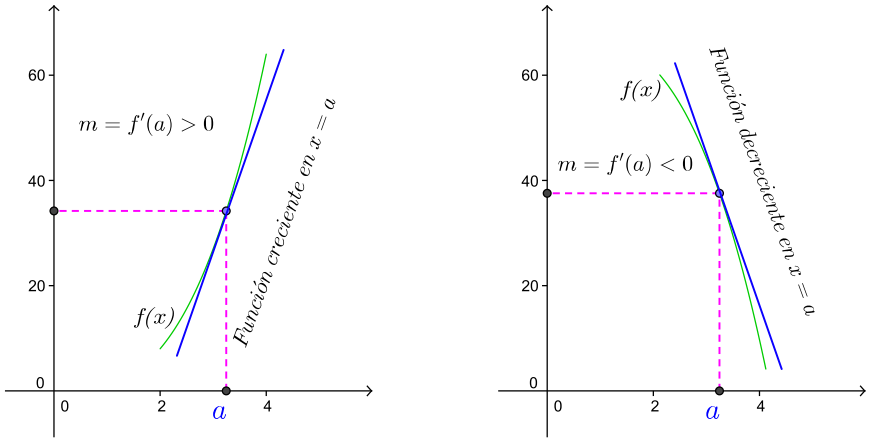
Vemos que haciendo un arreglo a medida que se desarrolla las derivadas coincide con el exponente del factor 2 en consecuencia si tenemos una derivada de orden 350 se tendría $f(x) = 2^{350} e^{2x}$, en conclusión una derivada del orden n-ésimo sería $f(x) = 2^n e^{2x}$, con lo que queda resuelto el ejemplo.

3.4 Criterios de derivación

En esta sección para tratar los criterios de derivación es necesario considerar previos conocimientos que trataremos a continuación:

3.4.1 Función creciente y decreciente

En la gráfica de una función se determina sus tangentes que en el recorrido éstas tangentes cambian a medida que recorren puntos de la gráfica así se vio en la Figura 1.21, las tangentes son positivas y negativas, si la tangente es positiva, la función es creciente en el punto de tangencia y si la tangente es negativa, la función es decreciente en el punto de tangencia, veamos gráficamente estos dos resultados:



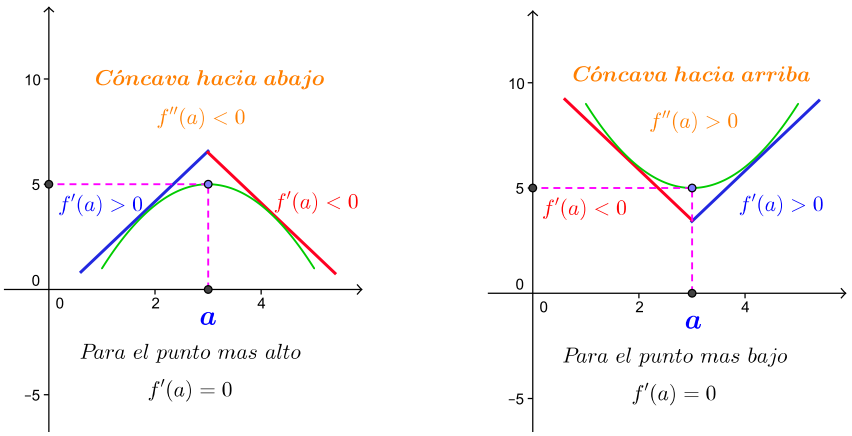
(a) Función creciente (b) Función decreciente

Figura 3.16: Funciones creciente y decreciente

3.4.2 Concavidad y punto de inflexión

La concavidad es otra característica que una función puede tener, para entender de mejor manera diremos que una función es cóncava hacia arriba, en un intervalo **I** del dominio de la función, cuando la recta tangente en un punto $(\mathbf{a}, \mathbf{f(a)})$, $\mathbf{a} \in \mathbf{I}$, está por debajo de la gráfica de $f(x)$. Por otro lado diremos que una función es cóncava hacia abajo, en un intervalo **I** del dominio de la función, cuando la recta tangente en un punto $(\mathbf{a}, \mathbf{f(a)})$, $\mathbf{a} \in \mathbf{I}$, está por encima de la gráfica de $f(x)$.

La representación gráfica se muestra a continuación:



(a) Cóncava hacia abajo (b) Cóncava hacia arriba

Figura 3.17: Concavidad de una función

En referencia a la Figura 3.17 **a)** al punto más alto se le llama máximo absoluto y a los puntos cercanos como máximos relativos. Por otro lado en la figura **b)** al punto más bajo se le llama mínimo absoluto y a los puntos cercanos mínimos relativos.

Definición 3.3 Punto de inflexión

Un punto de inflexión de una curva es un punto en donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

(Jagdish C. Arya/Robin W. Lardner 1992).

Según la definición de punto de inflexión, si tenemos una función $f(x)$, el punto de inflexión cambia de concavidad ya sea de abajo hacia arriba o viceversa, en consecuencia su segunda derivada cambia de mayor a menor y viceversa, veamos un gráfico en el que se muestra el punto de inflexión.

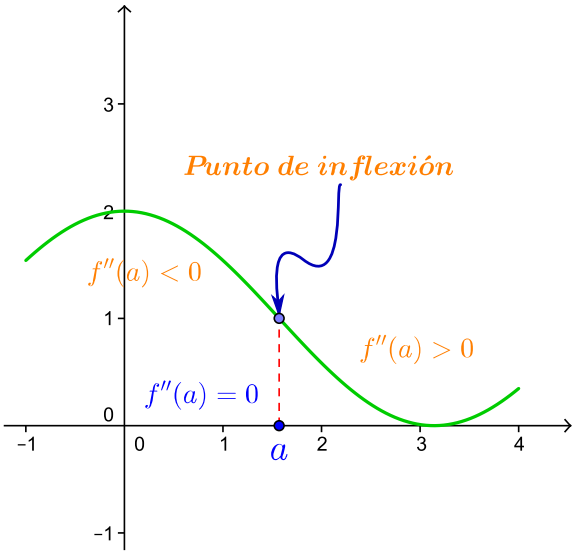


Figura 3.18: Punto de inflexión

3.4.3 Criterio de la primera derivada

En las aplicaciones de derivadas es importante determinar puntos importantes como máximos y mínimos de una función $f(x)$, tales son los casos de maximizar o minimizar costos, ingresos, utilidades, entre otras, por lo que para la determinación de dichos puntos trataremos el primer criterio de la derivada, a continuación veamos el siguiente teorema sobre este criterio:

Teorema 3.1 Criterio de la primera derivada para extremos relativos

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) que contiene al número **c**, y suponga que f' existe en todos los puntos de (a,b) excepto posiblemente en **c**:

(i) Si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a **c** como su extremo derecho, y si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a **c** como su extremo izquierdo, entonces f tiene una valor máximo relativo en **c**;

(ii) Si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a **c** como su extremo derecho, y si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a **c** como su extremo izquierdo, entonces f tiene una valor mínimo relativo en **c**.

(Leithold L. 1998).

Para tener una representación geométrica del primer criterio, podemos ver la Figura 3.17. Para la determinación de los extremos relativos de una función se consideran los siguientes pasos:

1. Calcular $f'(x)$.
2. Determinar los puntos críticos de f, es decir; los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ o para los que $f'(x)$ no existe.
3. Por último, se aplica el criterio de la primera derivada.

3.4.4 Criterio de la segunda derivada

El comportamiento de una función también es posible analizar mediante la segunda derivada, para el caso de la determinación de extremos relativos también es posible desarrollar mediante otro criterio, que es el segundo criterio de la derivada, que en muchas ocasiones resulta un proceso más corto y simple, veamos el teorema sobre este criterio.

Teorema 3.2 Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Sea **c** un punto crítico de una función f en el que $f'(c) = 0$, y suponga que f'' existe para todos los valores de x en un intervalo abierto que contiene a **c**.

(i) Si $f''(x) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en **c**.

(ii) Si $f''(x) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en **c**.

(Leithold L. 1998).

A continuación veamos algunos ejemplos aplicando estos criterios

Ejemplo 3.11

Determine los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x$

Solución:

Veamos el proceso mediante el programa wxMaxima

1. Ingresamos la función mediante el comando **x^3-3*x**.
2. Luego elegimos **Derivar** del menú **Análisis**.
3. Nuevamente se realiza el proceso anterior para obtener la segunda derivada.
4. Seleccionando la primera derivada elegimos **Resolver** del menú **Ecuaciones**

```
(%i1)   x^3-3*x;
(%o1)   x^3-3 x
(%i2)   diff(x^3-3*x,x,1);
(%o2)   3 x^2-3
(%i3)   diff(3*x^2-3,x,1);
(%o3)   6 x
(%i4)   solve([3*x^2-3], [x]);
(%o4)   [x=-1,x=1]
```

Figura 3.19: Puntos críticos

1. Consideramos como $g(x)$ la segunda derivada obtenida.
2. Reemplazando en la segunda derivada el punto crítico -1 resulta -6, es decir existe un máximo relativo en el punto -1, que sería $f(-1) = 2$.
3. Reemplazando en la segunda derivada el punto crítico 1 resulta 6, es decir existe un mínimo relativo en el punto 1, que sería $f(1) = -2$.

```
(%i5)    g(x):=6*x;
(%o5)    g(x):=6 x

(%i6)    g(-1);
(%o6)    -6

(%i7)    g(1);
(%o7)    6
```

Figura 3.20: Extremos relativos

Ejemplo 3.12

Se desea conocer las dimensiones de una caja rectangular abierta de base cuadrada de $6400cm^3$ para que resulte más económica, teniendo en cuenta que el precio de costo de la base es de 64 soles por cm^2 y el de las superficies laterales de 40 soles por cm^2.

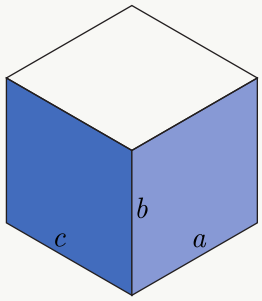


Figura 3.21: Representación de una caja vacía según el enunciado

Solución:

Para dar solución al problema en primer lugar es necesario realizar la construcción de una ecuación que represente el costo de la caja representada, puesto que el costo es la cantidad que tenemos que minimizar.
En base a la representación de la caja la base es **ac** y el costo de la base según el enunciado es $S/.$ 64 por cm^2 en consecuencia el costo será, $64ac$, por otro lado la superficie lateral es **ab** y el costo de la parte lateral sería $40ab$ como son cuatro lados se tiene $160ab$ que sería el costo total lateral, tengamos en cuenta que es una caja abierta, entonces no se considera la tapa, luego el costo total de la caja será: $C = 64ac + 160ab$, además es una caja de base cuadrada en consecuencia $a = c$, luego $C = 64a^2 + 160ab$, sabemos que el volumen que debe aceptar es $6400cm^3$, es decir $a^2b = 6400$, y considerando que el costo sea en función a una sola variable se tiene: $C = 64a^2 + 160(\frac{6400}{a})$, esta es la función que debemos minimizar para obtener el costo más económico, en consecuencia utilicemos el primer criterio de la derivada para esta razón utilizamos el indistintamente un programa libre que puede ser GeoGebra, wxMaxima u otro que se ira mencionando según los desarrollos.
Ingresamos en el programa GeoGebra siguiente comando:

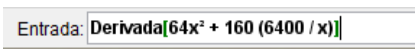


Figura 3.22: Ingreso de función - GeoGebra

Luego se tiene el siguiente resultado

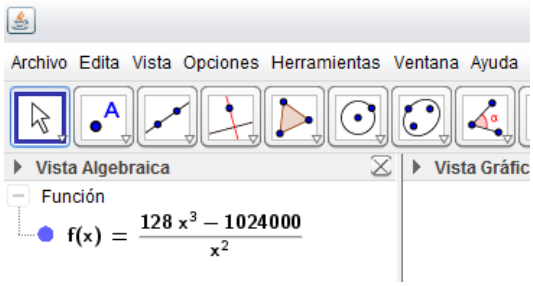


Figura 3.23: Resultado de Derivada de una función - GeoGebra

Advertencia:
Tener cuidado que en el resultado de la derivada indica $f(x)$, lo cual no es la función $f(x)$ si no la derivada de $f(x)$, es decir $f'(x) = \dfrac{128x^3 - 1024000}{x^2}$.

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la derivada a cero, luego se tendrá resolviendo para x los valores críticos, esto se obtiene igualando cada factor de la expresión a cero, entonces resolviendo este proceso en el programa wxMaxima cuyos comando son: **ratsimp** que es simplificar, **factor** que es factorizar y **solve** que es resolver se tiene:

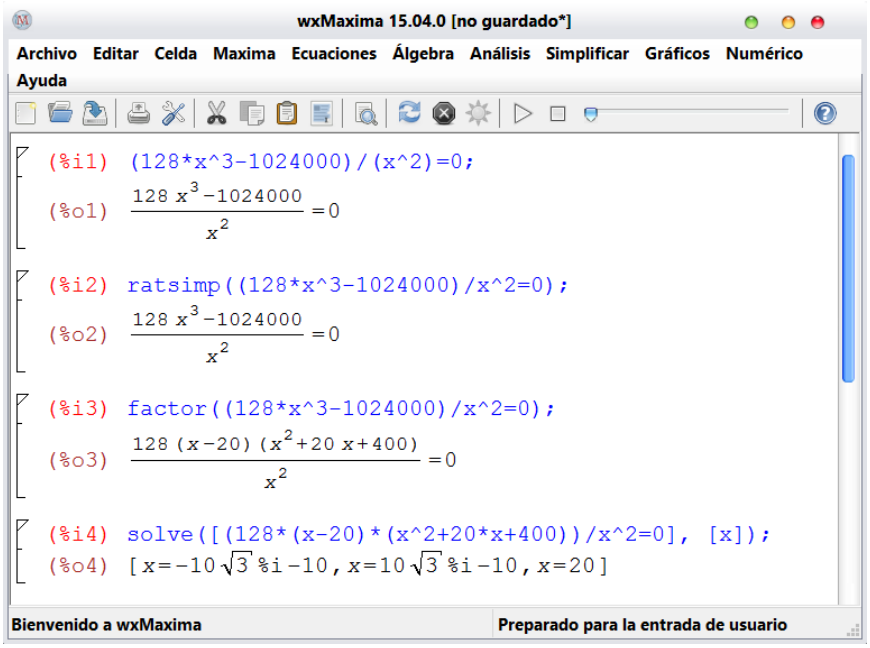


Figura 3.24: Puntos críticos en wxMaxima

El único valor real es $x = 20$ que corresponde al valor de a o de la base del cuadrado, veamos si este valor es máximo o mínimo, utilizando el primer criterio de la derivada.

Elegimos un valor cercano a veinte "c" sea 19 el valor y luego un valor mayor a 20, sea 21 entonces se tiene para dichos valores:
$f'(x) < 0$ para todo $x \in]19, 20[$
$f'(x) > 0$ para todo $x \in]20, 21[$
En consecuencia existe un mínimo que es justamente con el valor que obtendremos el costo mínimo de la caja.
Veamos el gráfico del resultado de la derivada en el programa GeoGebra

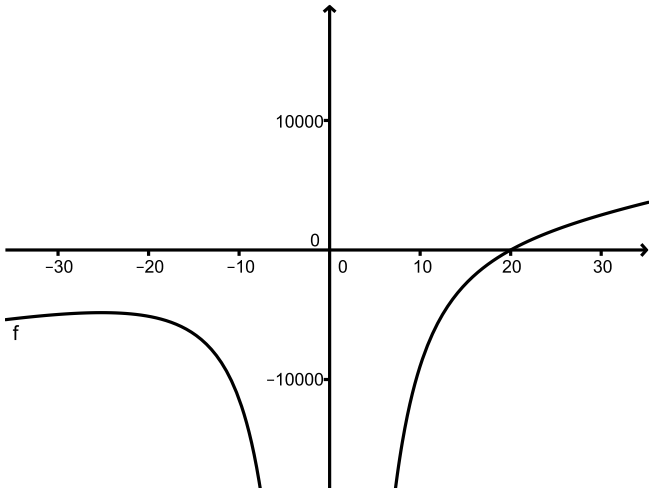


Figura 3.25: Gráfica de la función derivada en GeoGebra

Según el gráfico **3.23** la derivada de la función $f'(x) = \dfrac{128x^3 - 1024000}{x^2}$, vemos que en la parte positiva el valor mínimo se obtiene cuando x toma el valor de 20.
Para efectos del cálculo se realizo la sustitución de la variable **a** por **x**, en consecuencia $a = 20$, reemplazando en la función del volumen $a^2b = 6400$ se tendrá $b = 16$.
Por otro lado considerando las medida de halladas podemos encontrar el costo mínimo que sera igual a: $C = 64a^2 + 160ab = 64(20)^2 + 160(20)(16) = 25600$

Ejemplo 3.13

El costo de producir x artículos por semana es: $C(x) = 1000 + 6x - 0,003x^2 + 10^{-6}x^3$, pero no más de 3000 artículos pueden producirse por semana. Si la ecuación de demanda es: $p = 12 - 0,0015x$, encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso y el nivel que maximiza la utilidad.
Solución:
Veremos la solución utilizando el programa wxMaxima y GeoGebra:

En primer lugar los procesos que realizaremos será, formar las ecuaciones de ingreso y utilidad las cuales tendremos que maximizar, los procesos se muestran en la figura siguiente:

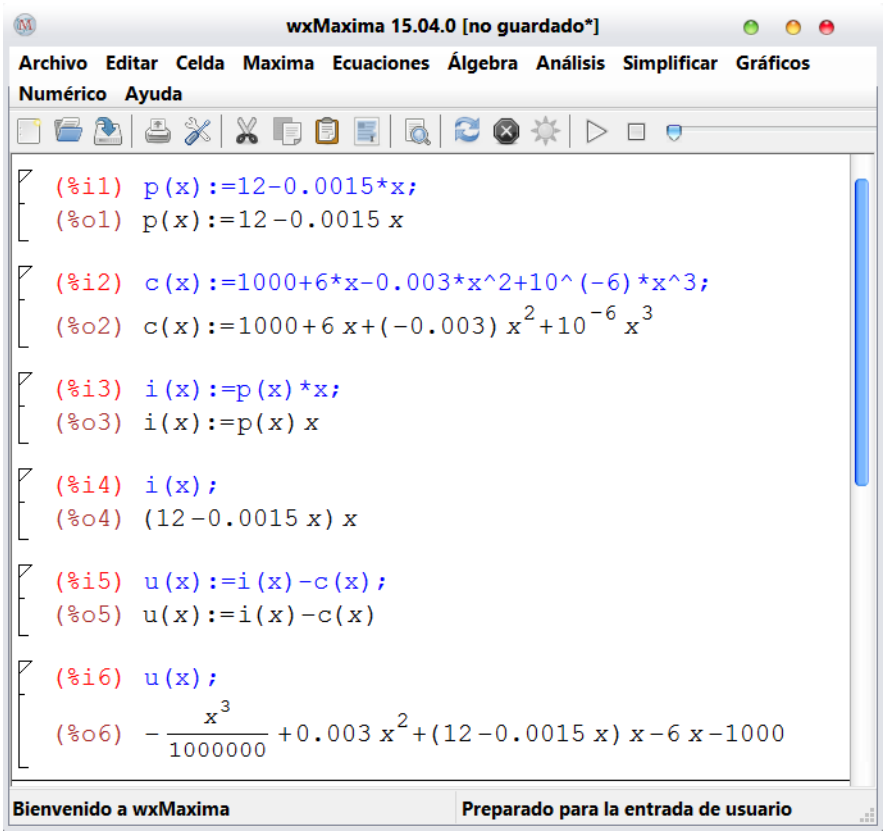


Figura 3.26: Proceso de creación del ingreso y utilidad

En la figura 3.26 se tiene la ecuación de ingreso que es igual al precio por la cantidad de productos, es decir $I(x) = P(x)x$, y la utilidad es igual al ingreso menos el costo, es decir $U(x) = I(x) - C(x)$, esto en base a las ecuaciones de demanda y costo según el enunciado del ejemplo. A continuación utilizando el primer criterio de la derivada derivamos el ingreso y la utilidad respectivamente e igualamos a cero para obtener los puntos críticos, así como se muestra en la siguiente figura:

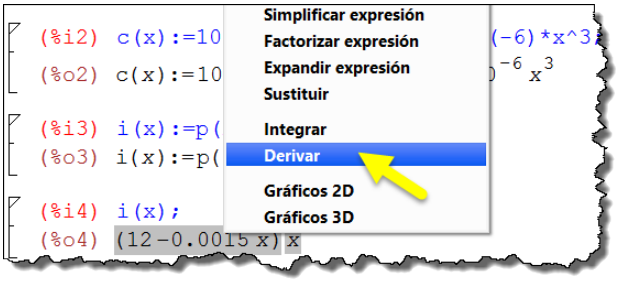


Figura 3.27: Derivando el ingreso

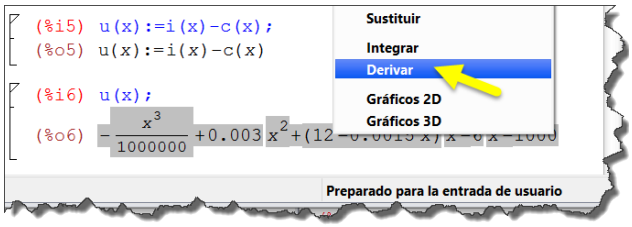


Figura 3.28: Derivando la utilidad

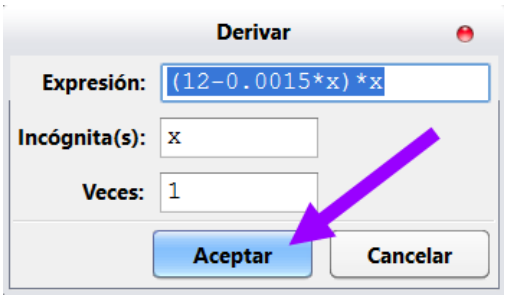


Figura 3.29: Primera derivada del ingreso

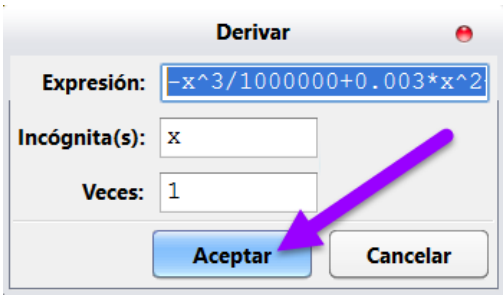


Figura 3.30: Primera derivada de la utilidad

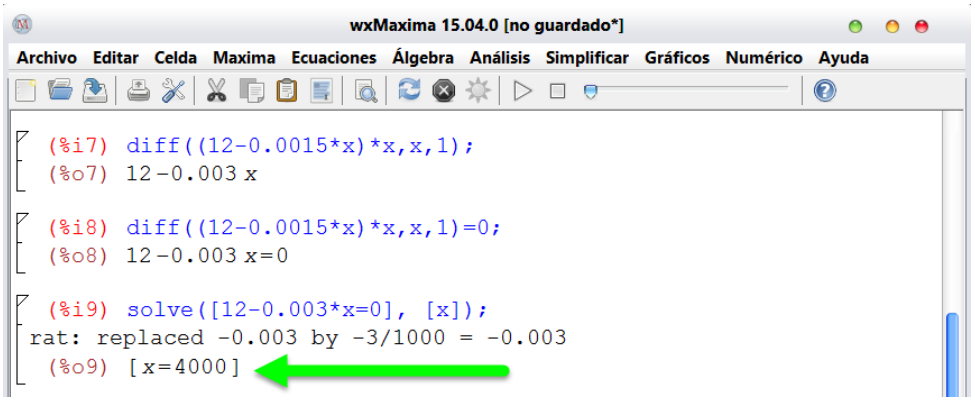


Figura 3.31: Resultados de puntos críticos para el ingreso

En referencia a la figura 3.29 que se muestra el resultado de la solución se obtiene seleccionando la ecuación y haciendo clic derecho y eligiendo el comando **resolver**, es así que obtenemos el resultado igual a $x = 4000$. Según el enunciado indica que no se pueden producir más de 3000 artículos por semana, en consecuencia la cantidad de artículos que se deben producir para maximizar el ingreso será 3000.

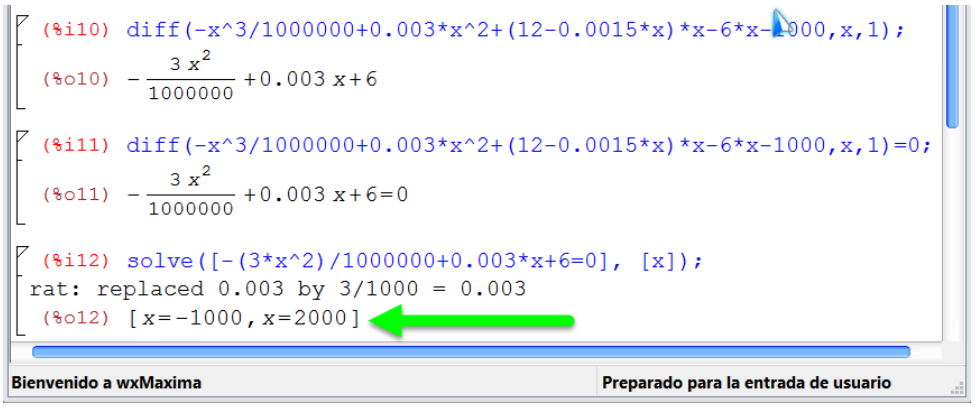


Figura 3.32: Resultados de puntos críticos para la utilidad

En referencia a la figura 3.30 que se muestra el resultado de la solución se obtiene seleccionando la ecuación derivada de la utilidad y haciendo clic derecho y eligiendo el comando **resolver**, es así que obtenemos el

resultado igual a $x = -1000$, $x = 2000$, de donde consideramos el valor positivo de artículos que se producen, en consecuencia para maximizar la utilidad se debe producir 2000 artículos.
Gráficamente se muestra a continuación que los valores obtenidos son los que maximizan el ingreso y utilidad

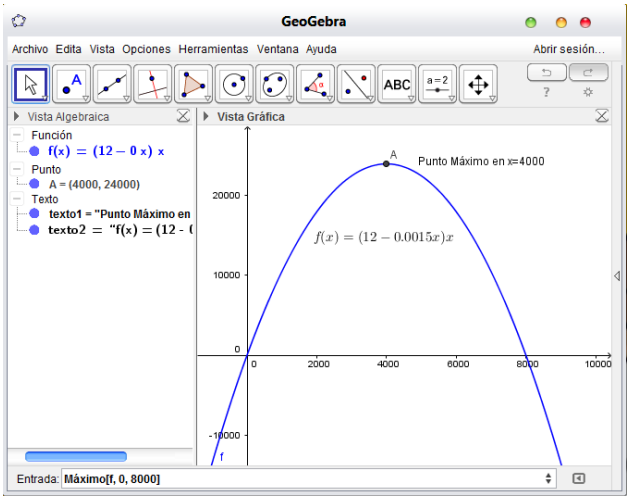


Figura 3.33: Maximización del ingreso

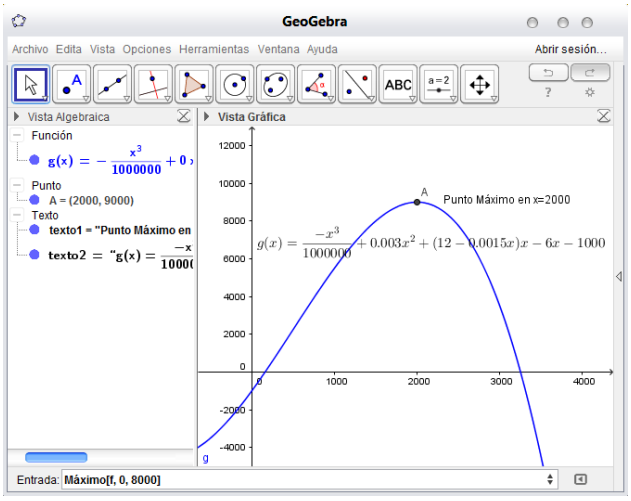


Figura 3.34: Maximización de la utilidad

Advertencia:
Considere que en las gráficas debe considerarse que $f(x)$ es el ingreso y $g(x)$ es la utilidad.

Con lo que quedaría resuelto el ejemplo planteado.

Ejemplo 3.14

Un estudio de eficiencia de turno matinal en una cierta fábrica revela que un obrero medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá producido $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades t horas más tarde. Considere que el ingreso al trabajo es a las 8:00 a.m. y la salida es a la 1:00 p.m.

a) Calcule la tasa de producción del trabajador a las 9:00 a.m.

b) ¿A qué razón cambia la tasa de producción del trabajador con respecto al tiempo a las 9:00 a.m.?

c) Calcule el cambio real en la tasa de producción del trabajador entre las 9:00 a.m. y 9:06 a.m.

d) ¿En qué momento de la mañana opera el trabajador con la eficiencia máxima?

e) ¿En qué momento de la mañana opera el trabajador con la eficiencia mínima?

Solución:

a) Para calcular la tasa de producción del trabajador a las 9:00 a.m., debemos considerar cuanto es el tiempo si el trabajador ingresa de 8:00 a.m. a 1:00 p.m. el intervalo de trabajo considerando el tiempo

t es $0 \leq t \leq 5$, donde para las 9:00 a.m. le corresponde $t = 1$, y para las 1:00 p.m. le corresponde $t = 5$ que es el horario de salida, en consecuencia calcularemos la tasa de cambio en $t = 1$, para dicho efecto calculamos la derivada de la función $Q(t)$ que es la tasa de producción del trabajador, a continuación se muestra el desarrollo en el programa GeoGebra, mediante los siguientes pasos:

1. Ingresamos en la linea de entrada la función $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$. mediante el siguiente comando **`f(x)=-x^3+9x^2+12x`**, luego damos enter y se obtiene así el ingreso de la función de producción del trabajador adicionalmente tendremos en la vista gráfica del programa la gráfica de la función en la que debemos de considerar la parte positiva, puesto que la producción no se puede considerar negativa.

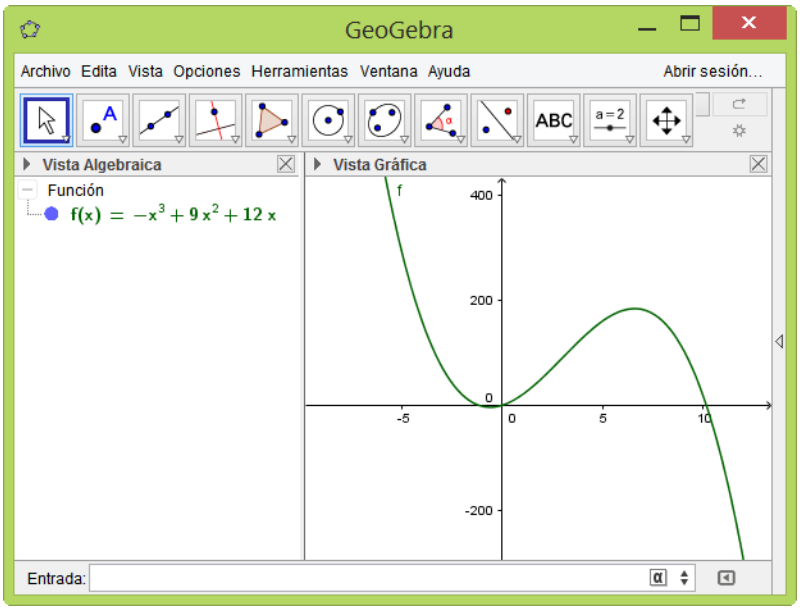


Figura 3.35: Ingreso de la función $Q(t)$ en GeoGebra

> **Nota:**
> Para el ingreso de la función se utilizó el cambio de variable de **t** por **x**, puesto que por defecto en un sistema cartesiano trabajamos con las variables **x** e **y**, sin embargo, también se puede trabajar con la variable t.

2. Luego aplicando la derivada mediante el siguiente comando **`Derivada[f(x)]`**, (para que se visualice el comando automáticamente simplemente en la barra de ingreso colocamos parte de la función como "Deri" y automáticamente se completará el comando y nos pedirá la función para obtener su derivada), al obtener la derivada de la función esta denotada con $g(x)$ que será la tasa de producción del trabajador en cualquier instante del día, se tiene también en la siguiente figura, en la cual se puede apreciar la gráfica de la función tasa de cambio que viene a ser una función cuadrática:

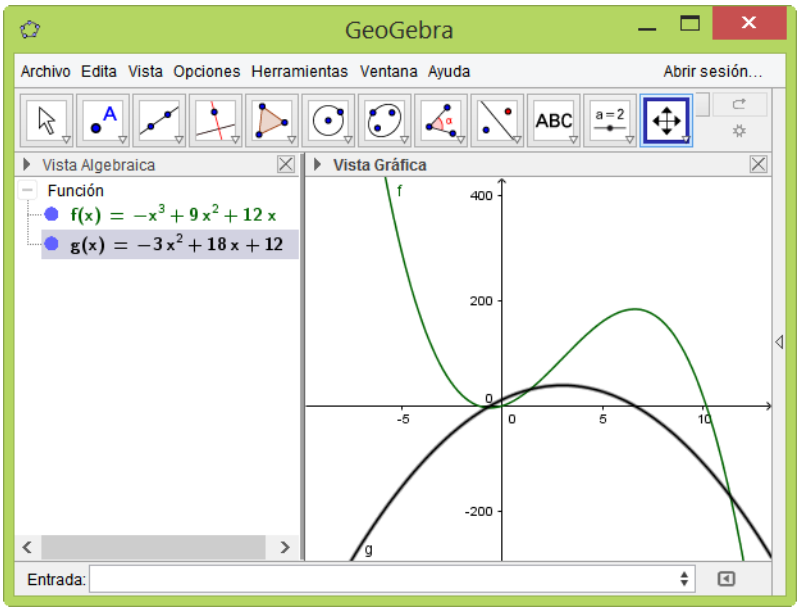


Figura 3.36: Derivada de la función $Q(t)$ en GeoGebra

3. Por último, si ingresamos el comando **`g(1)`**, puesto que el tiempo $t = 1$ corresponde a las 9:00 a.m. obtendremos la tasa de producción del trabajador a las 9:00 a.m.

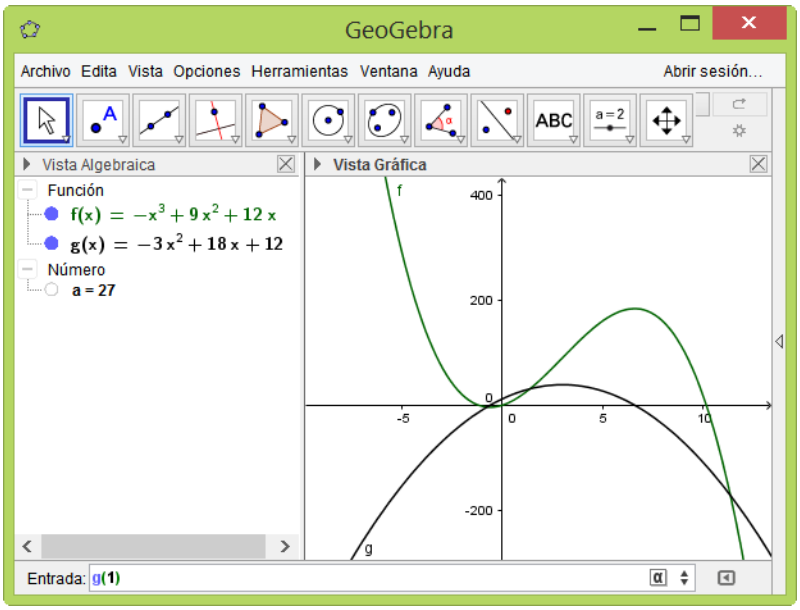


Figura 3.37: Respuesta tasa de producción del trabajador a las 9:00 a.m.

Con lo cual se da respuesta a la parte **a)** del problema, es decir la tasa de producción del trabajador a las 9:00 a.m. es de 27 unidades por hora.

b) Para la solución de la segunda parte derivando la tasa de cambio obtenida en la parte **a)** es decir la segunda derivada de la producción nos dará la razón de cambio de la tasa de cambio, en consecuencia veamos el desarrollo en el programa:

1. Para la derivada ingresamos en la barra de entrada el siguiente comando **`Derivada[g(x)]`**, y luego damos enter y así obtendremos el cambio de la tasa de cambio para un tiempo t.

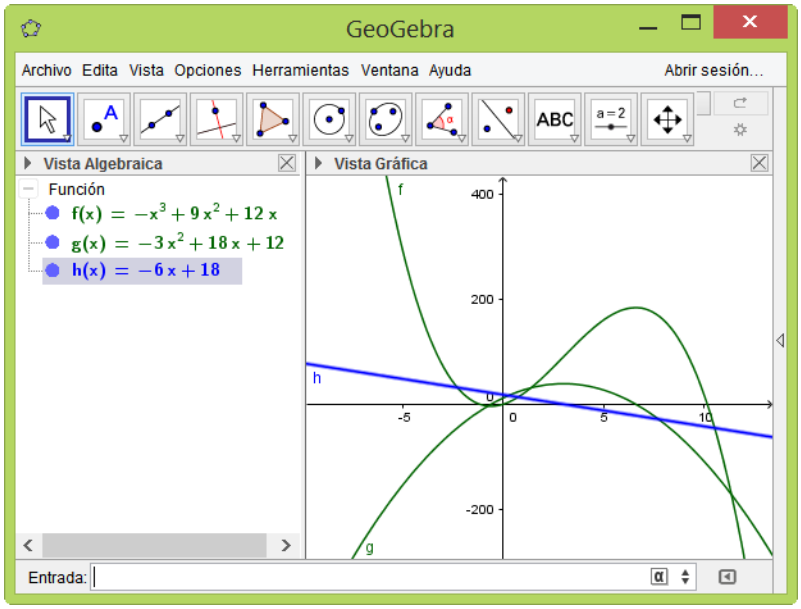


Figura 3.38: Derivada de la función tasa de cambio en GeoGebra

2. Vemos en la figura que la función está representada mediante la función "h", en esta función sustituimos para un tiempo $t = 1$, puesto que a las 9:00 a.m. le corresponde ese tiempo, así el resultado es 12, como se muestra en la figura, que representa la razón de cambio de la tasa de producción de un trabajador a las 9:00 a.m.

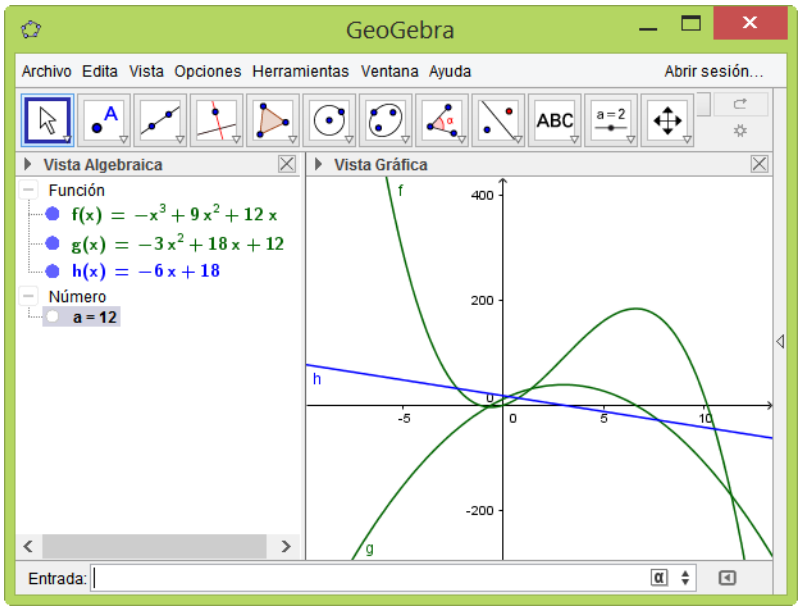


Figura 3.39: Resultado de la función razón de cambio de la tasa de cambio en GeoGebra

c) Para esta parte utilizaremos la respuesta obtenida en la parte **a)**:

Para encontrar el cambio en la tasa analizando el tiempo t a las 9:00 a.m. y 9:06 a.m. se tiene $t = 1$ y $t = \frac{11}{10}$, puesto que 6 minutos corresponde a la décima parte, luego el resultado será aplicando $g(t_2) - g(t_1) = g(11/10) - g(1)$, que es el cambio de la tasa en los tiempos respectivos, cuyo resultado es $1,17$, así como se presenta en la figura adjunta, en conclusión el cambio real en la tasa de producción del trabajador entre las 9:00 a.m. y 9:06 a.m. es $1,17$ unidades por hora.

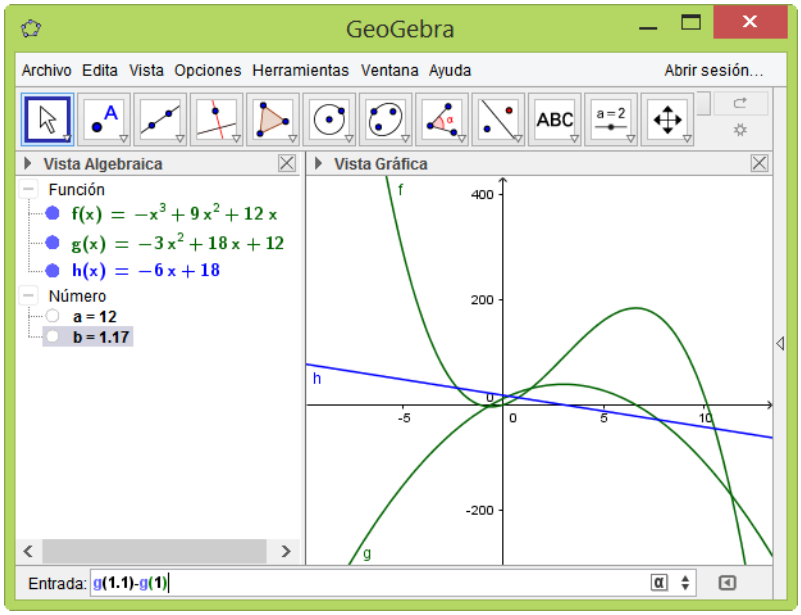


Figura 3.40: Resultado del cambio real en la tasa de producción del trabajador en GeoGebra

d) Para encontrar el momento en el que el trabajador opera con la máxima eficiencia debemos de derivar la tasa de producción que la obtuvimos en el apartado **b)**, que sería como estar aplicando el criterio de la segunda derivada para encontrar los puntos máximos o mínimos, veamos el proceso en el programa:

Para encontrar el punto máximo según la definición igualamos a cero la segunda derivada, sin embargo, podemos encontrar el máximo utilizando el siguiente comando **`Máximo[h(x), 0, 5]`** cuyo resultado se $A = (3,39)$ en consecuencia el punto máximo es en $x = 3$ que corresponde a las 11:00 a.m.

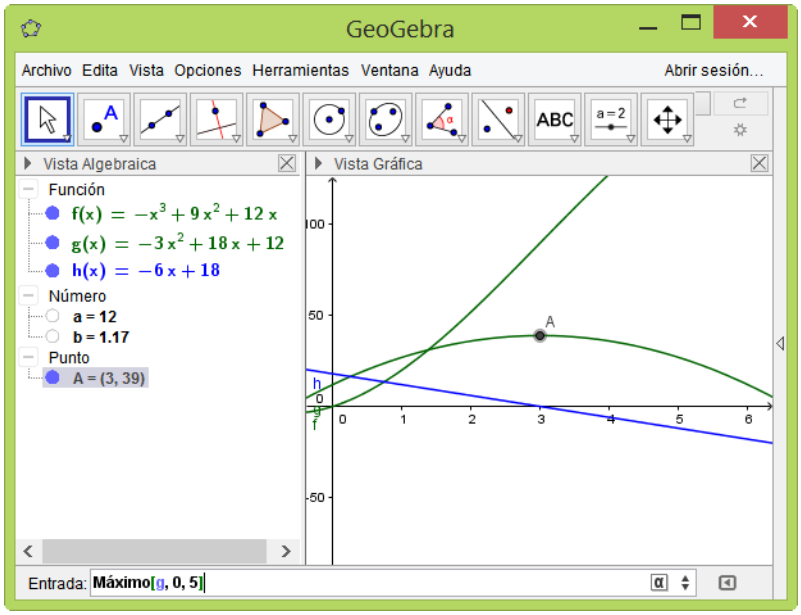


Figura 3.41: Resultado eficiencia máxima del trabajador en GeoGebra

e) Para encontrar el momento en el que el trabajador opera con la mínima eficiencia debemos de comparar los resultados para los valores del intervalo $0 \leq t \leq 5$ incluyendo el valor máximo, es decir para los valores 0, 3 y 5, es decir desde el ingreso del trabajador hasta la salida del mismo, veamos en el programa

Así entonces tenemos los resultados $g(0) = 12$, $g(3) = 39$ y $g(5) = 27$, entonces podemos concluir que la eficiencia mínima se tiene en el momento de iniciar el trabajo a las 8:00 a.m., los resultados se muestra en la figura adjunta. el valor que se considera para la máxima eficiencia corresponde al punto de inflexión en la función $f(x)$, cuya animación puede apreciar en el enlace siguiente http://tube.geogebra.org/student/m1946715

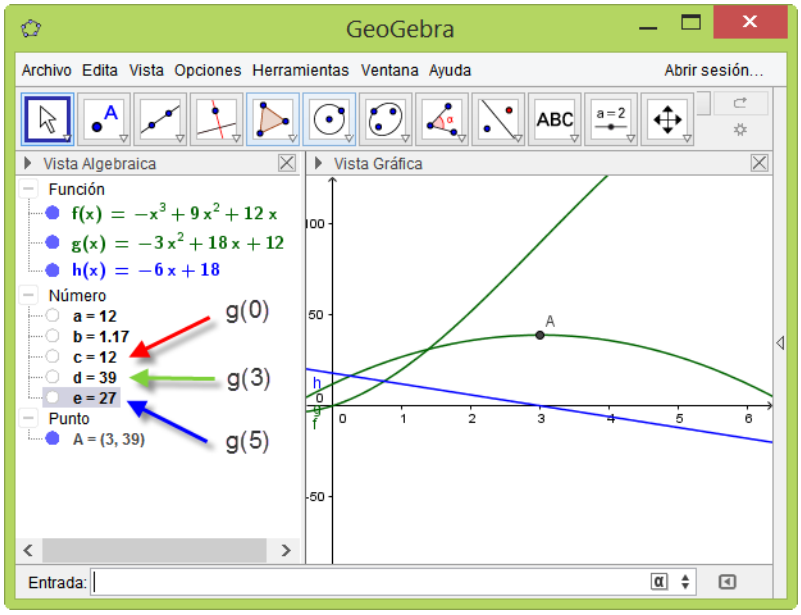


Figura 3.42: Resultado eficiencia mínima del trabajador en GeoGebra

3.5 Aplicaciones

Ejemplo 3.15

Una compañía obtiene un ingreso de \$5 por cada artículo de su producto que vende. Si gasta A dólares por semana en publicidad, el número de artículos que vende por semana está dado por

$$x = 2000(1 - e^{-kA})$$

en donde $k = 0,001$. Determine el valor de A que maximiza la utilidad neta.

Solución:

Para dar solución a este problema en primer lugar se construye la utilidad neta, la cual se tiene que maximizar, que sería la siguiente ecuación: $U = 5x - A$, reemplazando la ecuación del número de artículos según el enunciado del problema se tiene: $U = 5[2000(1 - e^{-kA})] - A = 5[2000(1 - e^{-0,001A})] - A$, para encontrar la derivada utilicemos el programa GeoGebra, según el ingreso de los siguientes comandos:

- Ingreso de la función: `u(A) = 5*(2000*(1 - e^(-0.001*A))) - A`
- Ingreso del comando para la derivación: `Derivada[u]`

Con lo que se obtiene la derivada y sus respectivas gráficas, como se muestra a continuación:

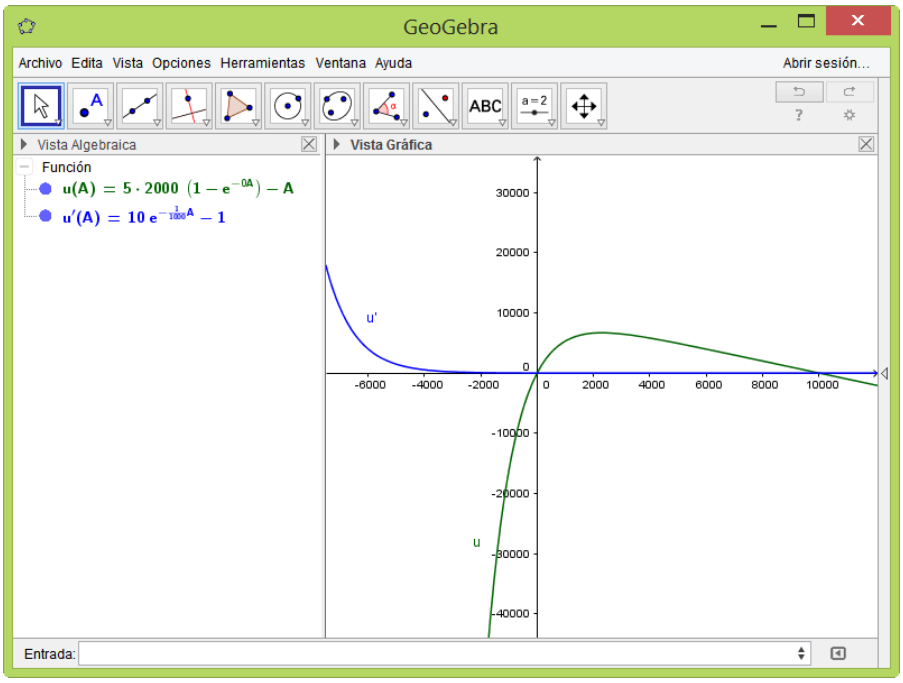


Figura 3.43: Derivada de la función utilidad

A continuación se requiere encontrar el punto A que maximiza la utilidad, para dicho efecto simplemente se iguala a cero la derivada obtenida y despejamos **A**, para este caso utilizaremos el programa wxMaxima, según los comandos que se muestra en la siguiente figura:

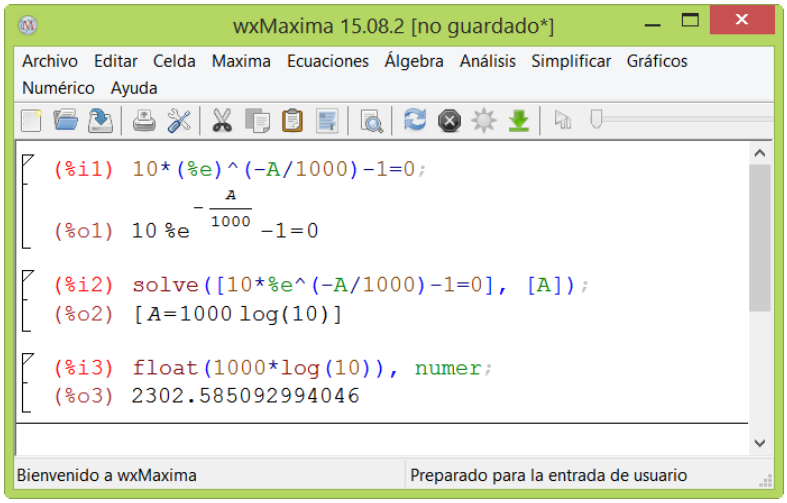


Figura 3.44: Maximización de A dólares por publicidad

Para encontrar la solución de la ecuación planteada en la parte (%i1) ingresamos al menú **ecuaciones >resolver**, así encontraremos el resultado en (%o2) y para encontrar el resultado final de (%o3) sombreamos el resultado de **A** y hacemos clic en **A real** que es el comando float, así como se muestra en las figuras adjuntas siguientes.

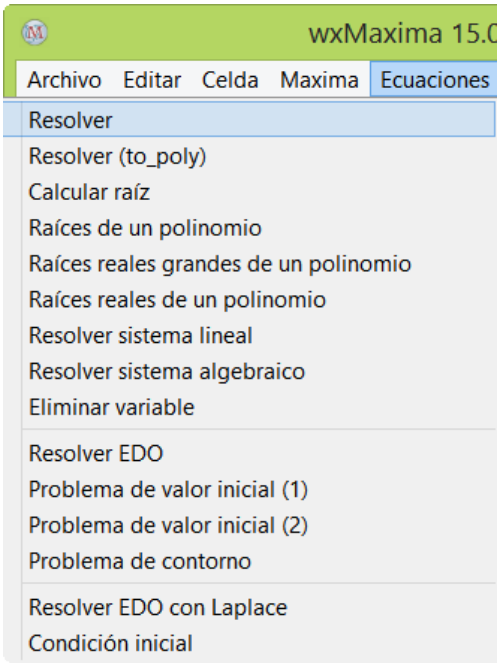


Figura 3.45: Menú resolver en wxMaxima

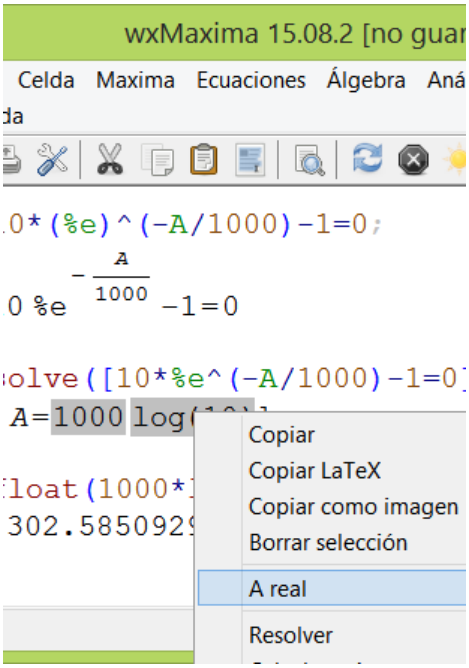


Figura 3.46: Comando float en wxMaxima

En consecuencia el valor de **A** que maximiza la utilidad neta es $A = 2302{,}58$ dólares, para encontrar la utilidad máxima se reemplaza en la utilidad el valor de **A** encontrado lo cual resulta 6697,41 dólares, según el comando en (%i2), considerando que previamente se ingresa la función utilidad que se muestra en la figura adjunta.

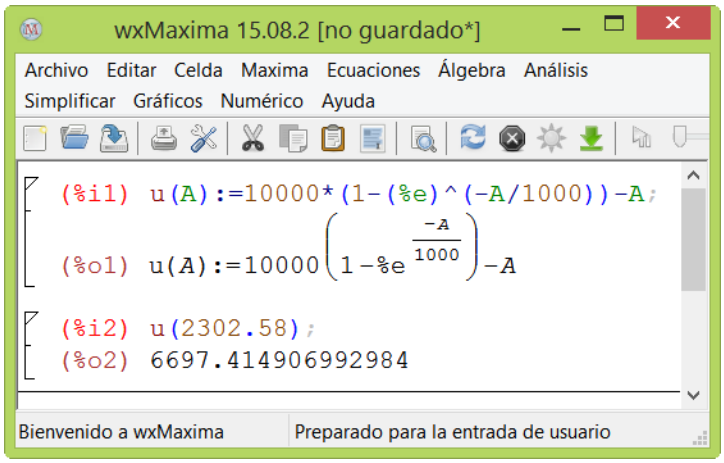


Figura 3.47: Resultado de la utilidad máxima

Ejemplo 3.16

Un banco quiere recortar sus costos laborales reduciendo el número de sus cajeros pero espera una pérdida de negocios debido al descontento de los clientes por el tiempo de espera. Supongamos que el salario de los cajeros es de \$80 diarios y la pérdida de utilidad por tener únicamente n cajeros es $5000/(n+1)$ dólares diarios. Determine el valor de n que minimiza la suma de sus pérdidas más el costo del salario.

Solución:

En primer lugar formemos la ecuación de pérdida en base al enunciado, si son 80 dólares por cajero entonces se tiene $80n$, a este resultado agregamos la pérdida de utilidad planteada en el enunciado que es $5000/(n+1)$, en consecuencia la ecuación de pérdida total es $u(n) = 80n + 5000/(n+1)$, esta ecuación la derivamos e igualamos a cero para encontrar el valor que minimiza las pérdidas, resolviendo con el programa wxMaxima se tiene:

1. Como primer paso se observa en (%i1) el ingreso de la ecuación general de pérdida.
2. a continuación ingresando al menú **Análisis** y luego en **Derivar** se obtiene (%o2).
3. Para obtener el tercer paso ingresamos al menú **Ecuaciones** y luego en **Resolver** obtenemos (%o3).
4. El resultado (%04) lo obtenemos ingresando al menú **Numérico** y luego en **A real**.
5. En consecuencia se tiene como resultado 6,9 cajeros, pero debe considerarse entero luego consideramos el resultado final $n = 7$

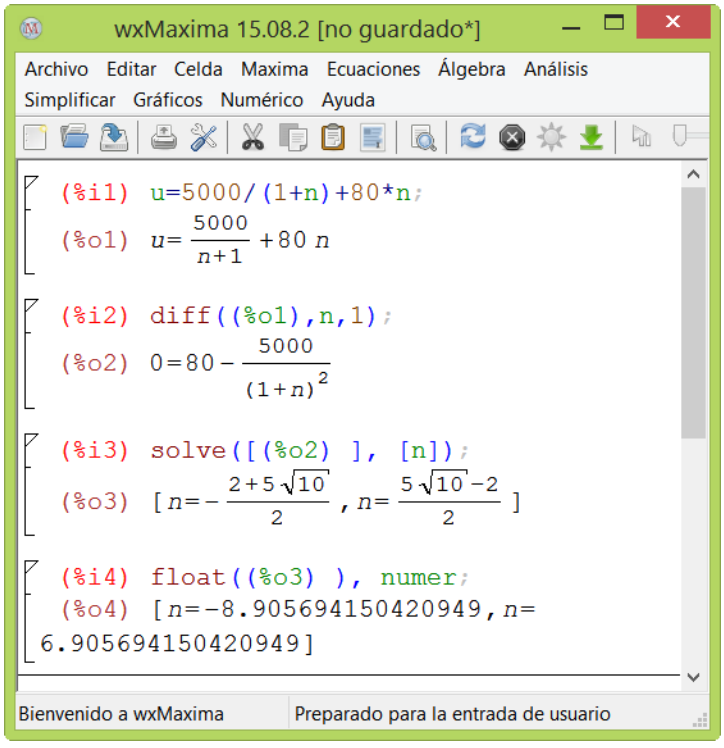


Figura 3.48: Resultado minimización de pérdidas

Para la verificación si $n = 7$ es el valor que minimiza la pérdida, a continuación se tiene los resultados numéricos sustituidos en la ecuación general de pérdida el cual se observa que efectivamente con $n = 7$ se obtiene la menor pérdida.

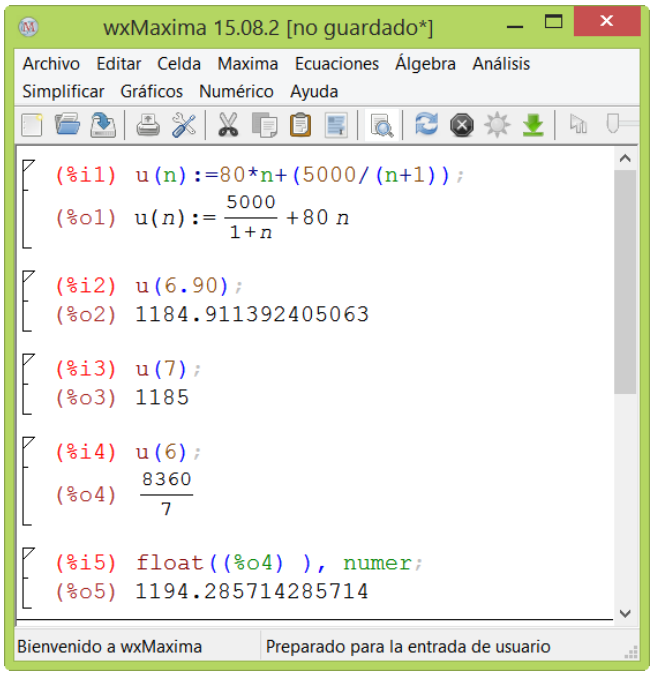


Figura 3.49: Resultados numéricos minimización de pérdidas

A continuación veamos la representación gráfica de la función, en el cual se aprecia los puntos sustituidos en el cual se muestra que para el valor $n = 7$ la mínima pérdida.

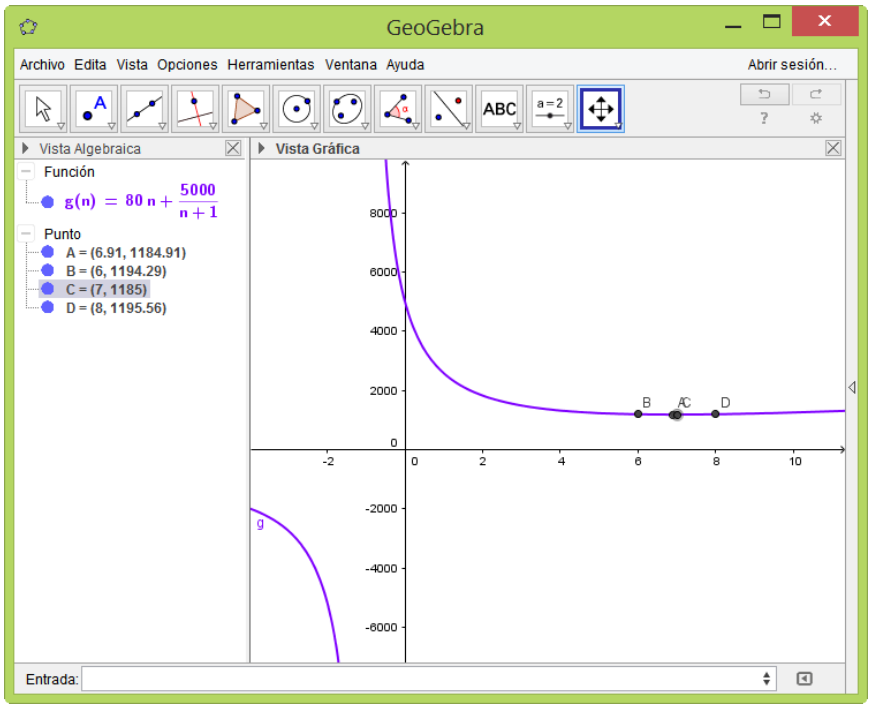


Figura 3.50: Resultados numéricos minimización de pérdidas

Ejemplo 3.17 **(Costo mínimo)**

Tiene que construirse una cisterna subterránea con la finalidad de albergar 100 pies cúbicos de desechos radiactivos. La cisterna tendrá forma cilíndrica. La base circular y la cara lateral, todos bajo tierra, tienen un costo de \$100 por pie cuadrado y la tapa, al nivel del suelo tiene un costo de \$300 por pie cuadrado debido a la necesidad de protección. Más aún, la profundidad del tanque no puede exceder los 6 pies porque una capa de dura roca está por debajo de la superficie, lo que incrementaría el costo de la excavación enormemente si se penetrara. Por último, el radio del tanque no puede exceder 4 pies por limitaciones de espacio. ¿Qué dimensiones del tanque hacen del costo un mínimo?

Solución:

Para dar solución al problema consideremos las características del cilindro que se muestra adjunto las cuales son: el radio será denotado por **r**, la altura del cilindro será **h**, cuyo volumen según el enunciado es $V = \pi r^2 h = 100$, de donde despejando para la altura tenemos:

$$h = \frac{100}{\pi r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1)$$

Además el costo del área lateral y de la base cuesta \$100 dólares por pie cuadrado y el costo de la tapa es \$300 dólares por pie cuadrado.

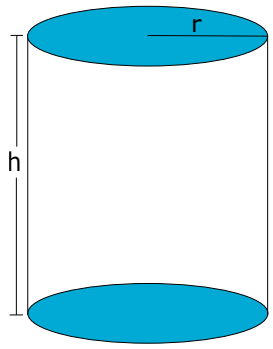


Figura 3.51: minimización de costo de una cisterna

Para minimizar el costo, en primer lugar es necesario conocer la ecuación de costo de la cisterna, entonces procederemos con los siguientes pasos:

1. El área lateral del cilindro es $2\pi rh$, y el área de la base es πr^2, Además como el costo es de \$100 dólares tenemos que el costo será $100(2\pi rh + \pi r^2)$.

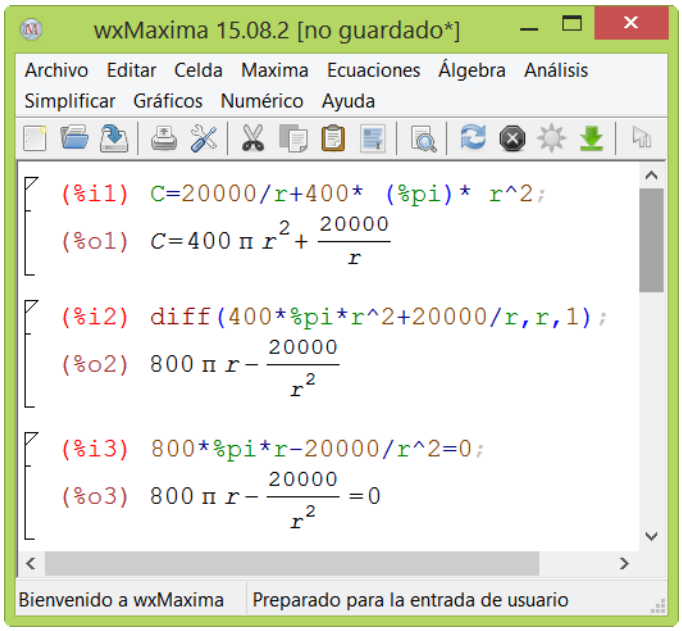
2. El área de la base del cilindro es πr^2, Además como el costo es de \$300 dólares tenemos que el costo será $300(\pi r^2)$.

3. Entonces el costo total es $C = 100(2\pi rh + \pi r^2) + 300(\pi r^2) = 200\pi rh + 400\pi r^2$, puesto que se tiene **h** según la ecuación **(3.1)**, entonces se tendrá la ecuación de costo en función al radio:

$$C = 200\pi r\left(\frac{100}{\pi r^2}\right) + 400\pi r^2$$

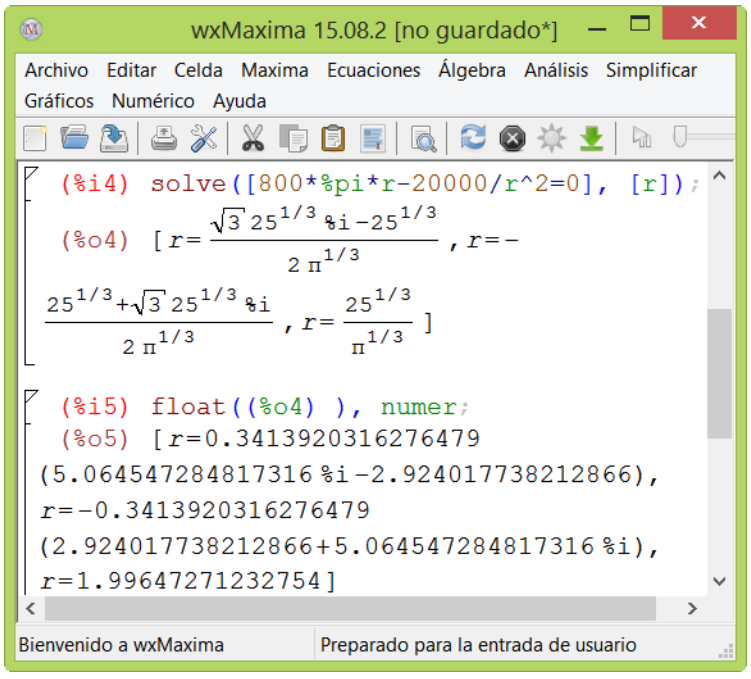
$$C(r) = \frac{20000}{r} + 400\pi r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2)$$

4. A continuación para encontrar en punto crítico **r** derivaremos la ecuación **(3.2)** que se muestra a continuación:



1. Como primer paso se observa en (%i1) el ingreso de la ecuación de costo total de la cisterna o cilindro.
2. Como segundo paso (%i2) se deriva ingresando al menú **`Análisis > Derivar`**.
3. Para encontrar la solución del radio **r** se iguala la ecuación a cero (%o3).

Figura 3.52: Resultado Derivada función costo



4. Como cuarto paso se observa en (%i4) la solución de la ecuación.
5. En (%o5) vemos el resultado convertido a real de los cuales consideramos el radio $r = 1{,}99 \approx 2$

Figura 3.53: Resultado Derivada función costo real

6. Como sexto paso se observa en (%i6) la sustitución del valor del radio para encontrar el valor de la altura.

7. Reemplazando el radio en la ecuación anterior se tiene el resultado (%o7).

8. El resultado de la altura es $h =$ 7,95 que se muestra en (%o8)

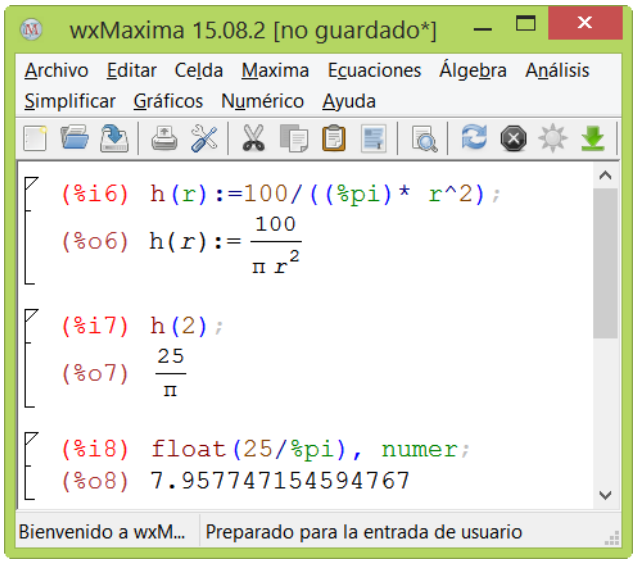


Figura 3.54: Calculo de valores - minimización costo

5. Según el enunciado del problema el valor del radio no puede exceder de 4 pies y el valor de la altura no debe exceder de 6 pies para el caso del radio no tenemos problema pero en el caso de la altura excede el valor encontrado por lo que consideramos el valor de la altura como 6 que según el enunciado es el valor máximo que se acepta, en consecuencia para $h = 6$ el radio es $r = 2,3$, en consecuencia el radio esta entre el rango $2,3 \leq r \leq 4$, entonces reemplazando dichos extremos el valor que minimiza los costos es para $r = 2,3$ y el costo resultante es $C = 15343,26$, con lo que se daría la solución al problema, así como se muestran las figuras siguientes:

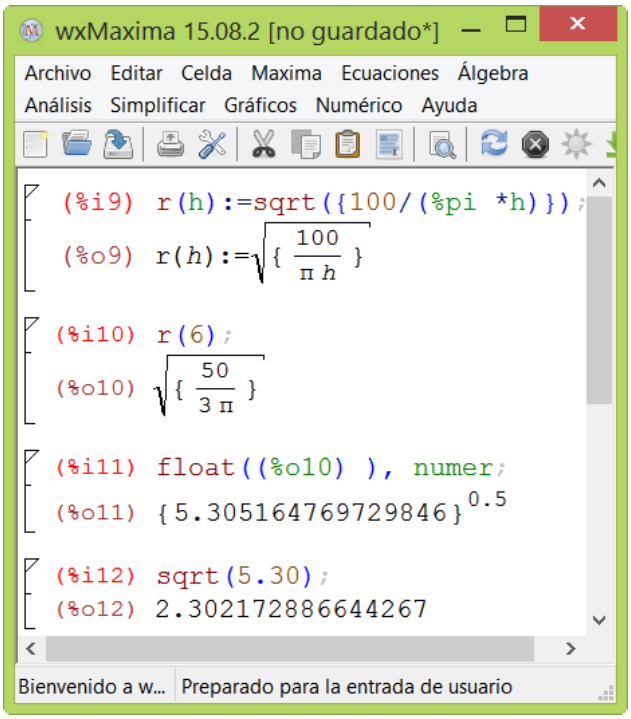


Figura 3.55: Resultados minimización de costo a)

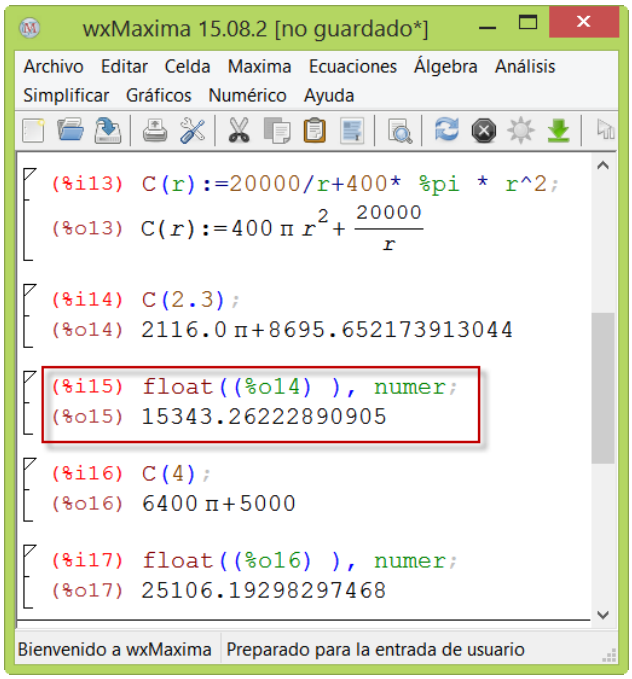


Figura 3.56: Resultados minimización de costo b)

Ejemplo 3.18 **(Utilidad máxima)**

Un fabricante puede producir equipos de sonido a un costo de S/. 1000. Actualmente está vendiendo 4000 equipos al año a distribuidores a un precio de S/. 2500 por equipo y calcula que por cada aumento de S/. 250 en su precio venderá 200 equipos menos cada año:

a) Mostrar que la utilidad anual del fabricante como función del precio al cual se vende los equipos esta dado por:

$$U(p) = \frac{4}{5}(7500 - p)(p - 1000)$$

b) Determine el precio que debe cobrarse para elevar al máximo la utilidad anual. ¿Cuál es la utilidad anual máxima?.

Solución:

Para dar solución a la parte **a)** del problema procedemos mediante los siguientes pasos como sigue:

1. Según el enunciado los equipos de sonido se venden a S/. 2500 y actualmente se venden 4000 equipos, según la condición si se tiene un aumento de S/. 250, las ventas se reducen en 200 equipos, entonces las ecuaciones del precio y cantidad de equipos para un **k** que consideramos como veces de aumento será:

   Planteo importante:

   $$Precio = P = 2500 + 250k \quad \ldots\ldots (3.3)$$

   $$Cantidad = 4000 - 200k \quad \ldots\ldots (3.4)$$

2. Por otro lado el ingreso está dado por: $I = precio \times cantidad$, también según el enunciado el costo de fabricación del equipo es S/. 1000.

3. En consecuencia podemos plantear la ecuación de la utilidad según los pasos anteriores como:

   $$U = Precio \times Cantidad - 1000 \times Cantidad \quad \ldots\ldots (3.5)$$

4. Reemplazando en la ecuación **(3.5)** que es la utilidad, la ecuación **(3.4)** que es la cantidad, puesto que la ecuación se requiere en función del precio ya no reemplazamos el precio, así entonces tenemos:

   $$U = Precio(4000 - 200k) - 1000(4000 - 200k) \quad \ldots\ldots (3.6)$$

5. En la ecuación **(3.6)** remplazando la variable **k** que se despeja de la ecuación **(3.3)** y realizando algunos arreglos se obtiene:

   $$U(p) = \frac{4}{5}(7500 - p)(p - 1000) \quad \ldots\ldots (3.7)$$

Que es lo que nos pide mostrar, con lo cual se da respuesta a la parte **a)** del problema:

■

Para continuar con la solución de la parte **b)** del problema en el cual nos pide maximizar la utilidad, derivamos la ecuación de la utilidad encontrada de la parte **a)**, así se muestra en los siguientes pasos:

1. Ingresamos la ecuación de la utilidad en el programa.
2. Como segundo paso, derivamos la función según se muestra en (%i2).
3. Luego ingresamos al menú **Ecuaciones > Resolver** elegimos la ecuación y resolvemos para p, con lo cual se muestra el resultado de $p = 4250$ que es el precio con el cual se obtiene la utilidad máxima.

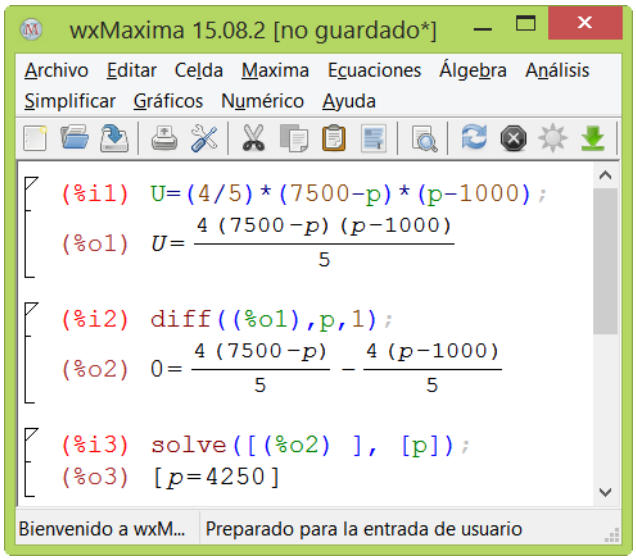


Figura 3.57: Resultado maximización de la utilidad

Y por último para encontrar la utilidad máxima procedemos de la siguiente manera:

1. Ingresamos la ecuación de la utilidad en el programa.
2. A continuación como segundo paso, considerando el valor del precio $p = 4250$, encontrado anteriormente, sustituimos en la ecuación de la utilidad, con lo cual obtenemos la utilidad máxima de S/. 8450000.

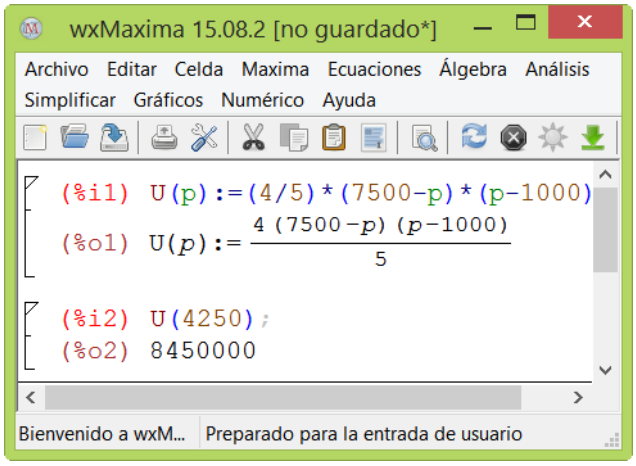


Figura 3.58: Resultado utilidad máxima

Ejemplo 3.19 **(Efecto del impuesto en la producción)**

La función de costo total de una fábrica está dada por $C(x) = 10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}$ y la demanda del producto está dada por $p = 2750 - 5x$, donde $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{x}$, denotan el precio en soles y la cantidad respectiva se grava con S/. 222 de impuesto por cada unidad producida, que el fabricante añade a su costo.

a) Determine el nivel de producción (después de creado el impuesto) necesario para maximizar las utilidades.

b) Muestre que la producción después del impuesto es menor que la producción antes del impuesto que maximiza las utilidades.

Solución:

Parte a)

La utilidad antes del impuesto está dado por $U(x) = R(x) - C(x)$, donde $R(x) = xp$ es el ingreso. puesto que según enunciado se tiene el precio y costo reemplazamos en la ecuación de la utilidad la cual sería la siguiente:

$$U(x) = (2750 - 5x)x - (10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}) \tag{3.8}$$

Para maximizar la utilidad ecuación anterior **(3.8)**, utilizaremos con el programa GeoGebra como se muestra a continuación:

Ingresamos en la barra de entrada del programa la función utilidad mediante el siguiente comando `U(x)=(2750-5*x)*x-(10+28*x-5*x^2+(x^3/3))`, luego utilizamos el siguiente comando `Derivada[U(x)]` para obtener la derivada, el resultado se muestra en la siguiente figura:

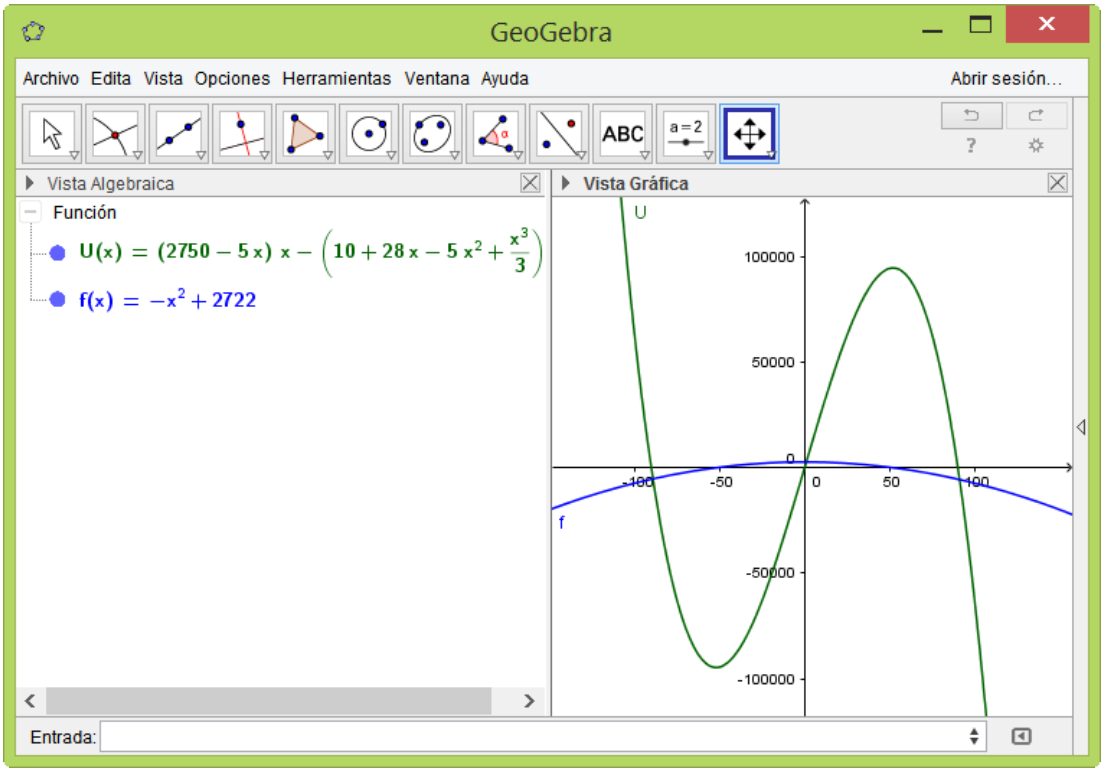


Figura 3.59: Maximización mediante el programa GeoGebra

Para encontrar la solución de la ecuación $-x^2 + 2722 = 0$ en el programa utilizamos los puntos de intersección de la función con el eje **X**, mediante la herramienta intersección y dando clic a la función y el eje **X** como se muestra en la figura siguiente.

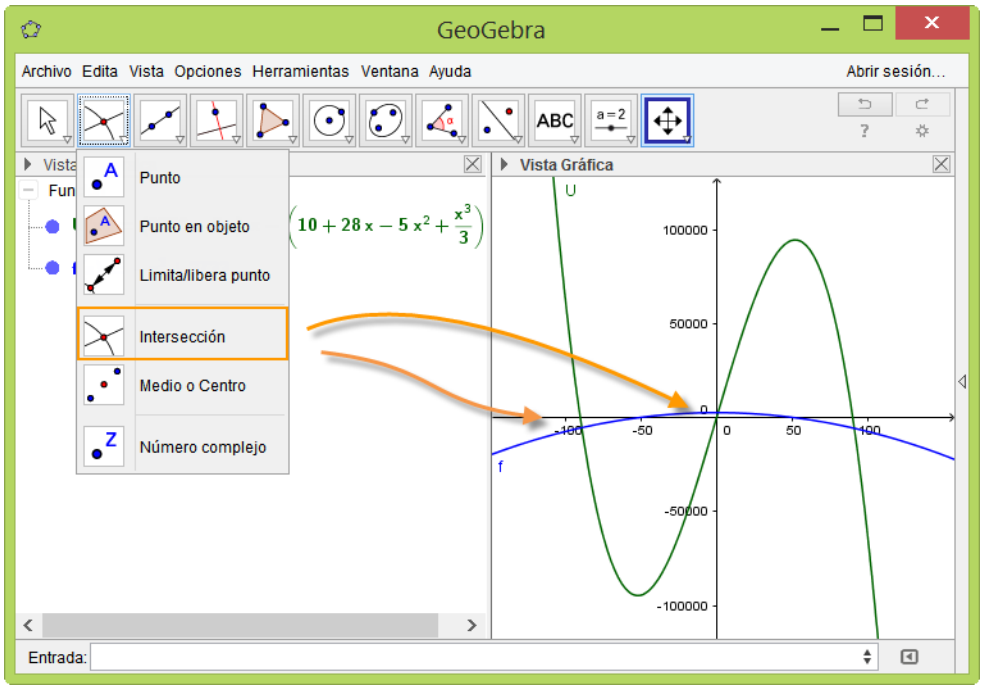


Figura 3.60: Soluciones de la función $f(x)$

El resultado de la intersección son los puntos A y B, para encontrar la utilidad máxima ingresamos en la barra de entrada el siguiente comando **`U(B)`** cuyo valor es 94666,22 soles el cual también se muestra en la figura siguiente:

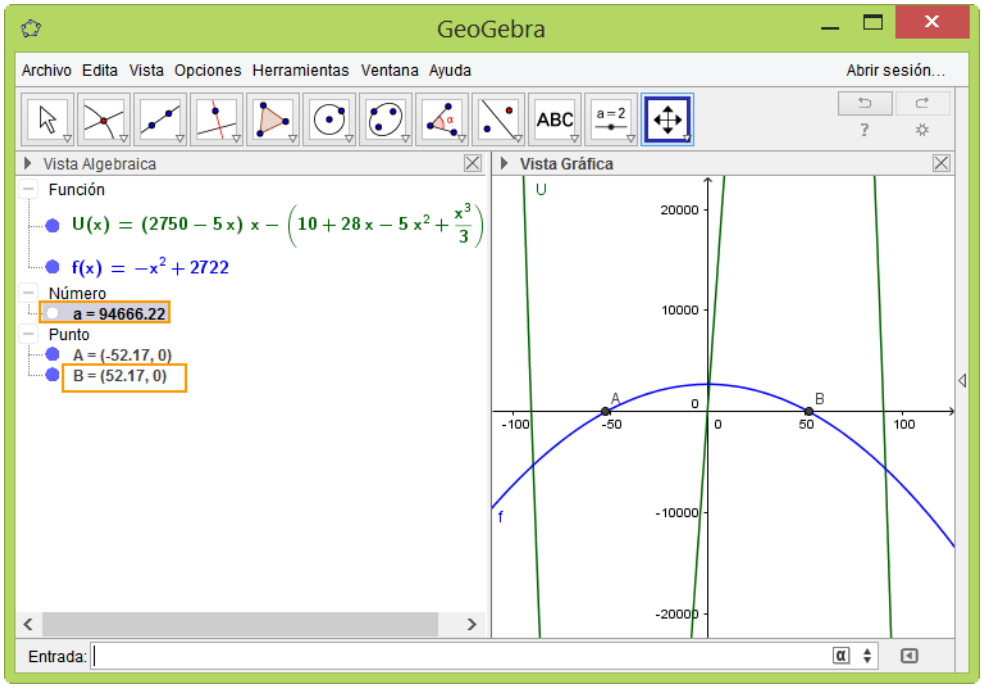


Figura 3.61: Soluciones en X de la función $f(x)$

Para encontrar la utilidad máxima también es posible utilizando el siguiente comando **`Máximo[U, 0, 100]`** en la línea de entrada y el punto se visualiza en la gráfica y el correspondiente resultado como se muestra en la figura siguiente:

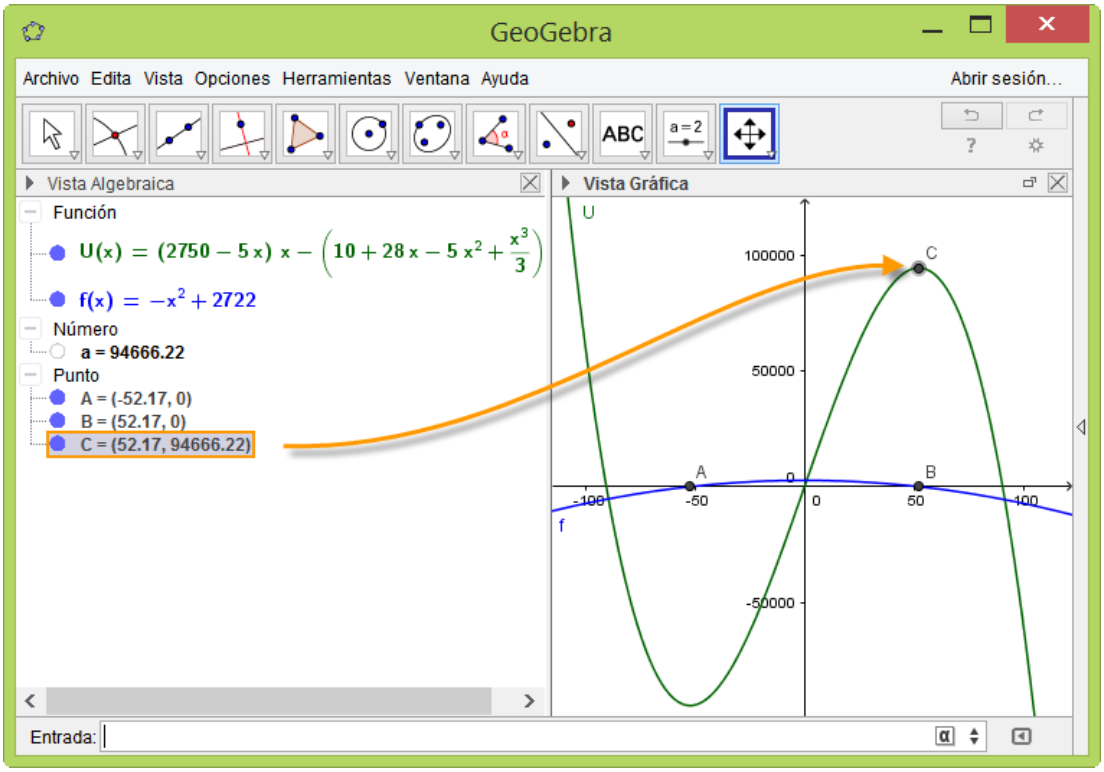


Figura 3.62: Resultado utilidad máxima

En el proceso anterior no se consideró el impuesto, si se considera dicho impuesto, el costo nuevo será $C_n(x) = 10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3} + 222x$, puesto que el impuesto es S/. 222 por cada artículo. En consecuencia la nueva utilidad es:

$$U_n(x) = (2750 - 5x)x - (10 + 28x - 5x^2 + \frac{x^3}{3} + 222x) \tag{3.9}$$

Realizamos el mismo proceso de maximización con la función de utilidad nueva o con impuesto, mediante los siguientes pasos ya vistos:

1. Ingresamos la función $U_n(x)$
2. Derivamos la función $U_n(x)$
3. Buscamos la solución para $\boldsymbol{X}$
4. Sustituimos el valor encontrado para determinar la utilidad máxima

Todos los procesos se muestran en la figura siguiente:

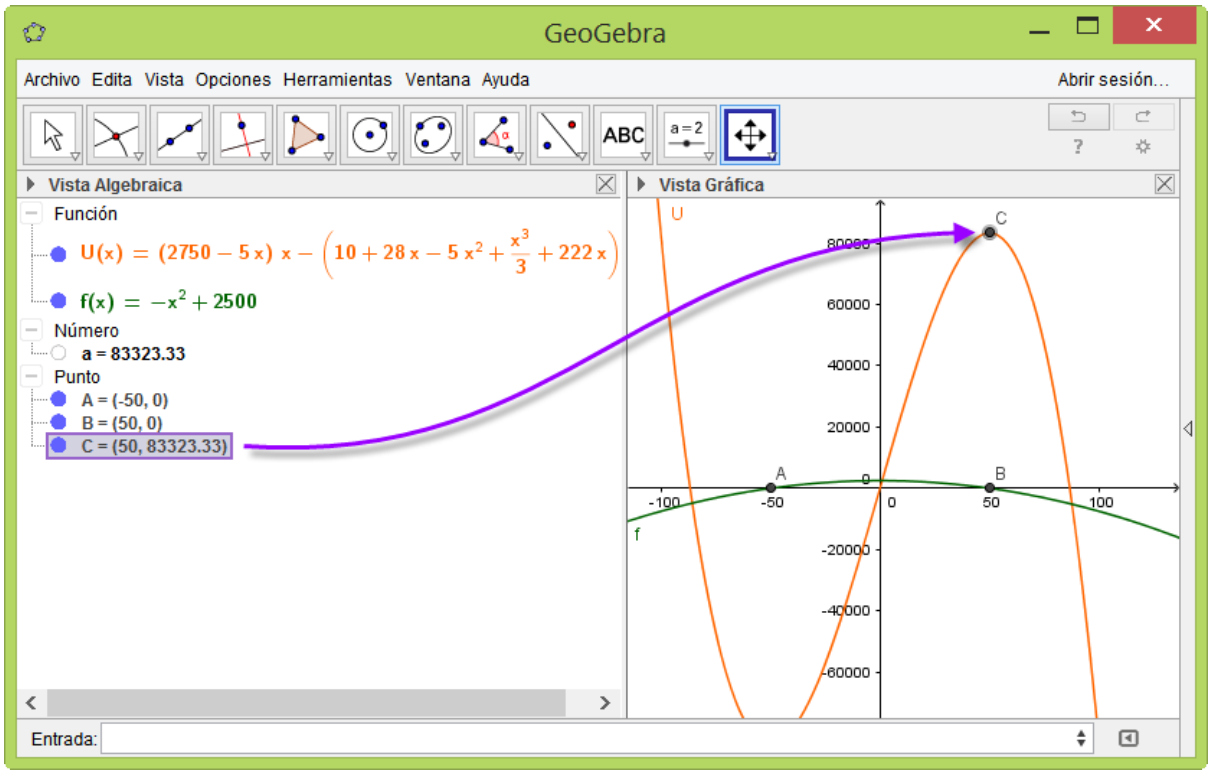


Figura 3.63: Resultado utilidad máxima con impuesto

De los dos resultados finales tenemos la siguiente tabla:

Tabla 3.2: Resultados finales Efecto del impuesto en la producción

Utilidades y su respectiva producción		
Utilidad sin impuesto	94666,22 soles	para $x = 52,17$
Utilidad con impuesto	83323,33 soles	para $x = 50$

Nota. Fuente: Elaboración propia basada en los resultados obtenidos.

De la tabla **(3.2)** podemos dar respuesta inmediata a la parte **a)** que es $x = 50$ que es el nivel de producción después de creado el impuesto, así mismo para **b)** se aprecia que el nivel de producción baja de $x = 52$ a $x = 50$ unidades, adicionalmente también vemos que la utilidad baja al gravar el impuesto de $94666,22$ a $83323,33$ soles.

4 La integral indefinida

La **Integral indefinida** es el conjunto de funciones llamadas **infinitas primitivas** que puede tener una función. Se representa por $\int f(x)dx$. Y se lee: integral de $f(x)$ diferencial de x.

El signo de Integración	
$\int$	Es el signo de integración.

A la función $\boldsymbol{f(x)}$ se le llama **integrando** o función a integrar.
$\boldsymbol{dx}$ es el **diferencial de x**, e indica con relación a qué variable se integrará la función.
$\boldsymbol{C}$ es la **constante de integración** y puede tomar cualquier valor numérico real, así entonces; Si $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ se tiene que: $\boldsymbol{\int f(x)dx = F(x)+C}$, Para comprobar que la primitiva de una función es correcta, basta con derivar $F(x)$. y el resultado obtenido debe ser la función $f(x)$.

4.1 Función primitiva o anti derivada

Función primitiva de una función dada $f(x)$, es otra función $F(x)$ cuya derivada es la función dada.
$F'(x) = f(x)$
Si una función $f(x)$ tiene primitiva, tiene infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas en una constante.

$$[F(x)+C]' = F'(x)+0 = F'(x) = f(x)$$

4.2 Linealidad de la integral indefinida

1. La **integral de la suma** de funciones es igual a la **suma de las integrales** de esas funciones.

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2. La **integral del producto de una constante por una función** es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

4.3 Fórmulas de integración

Tabla de integrales

Tabla 4.1: Integrales inmediatas para **x** y **f(x)**, primera parte

N°	Función simple	Función compuesta
1	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int [f(x)]^n\, f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)}[f'(x)dx] = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)}[f'(x)dx] = e^{f(x)} + C$
5	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin f(x)[f'(x)dx] = -\cos f(x) + C$
6	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos f(x)[f'(x)dx] = \sin f(x) + C$
7	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\int \sec^2 f(x)[f'(x)dx] = \tan f(x) + C$
8	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	$\int \csc^2 f(x)[f'(x)dx] = -\cot f(x) + C$
9	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	$\int \sec f(x)\tan f(x)[f'(x)dx] = \sec f(x) + C$
10	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$	$\int \csc f(x)\cot f(x)[f'(x)dx] = -\csc f(x) + C$

Nota. Fuente: Adaptado de Arce, Abel (2006).

Tabla 4.2: Integrales inmediatas para **x** y **f(x)**, segunda parte

N°	Función simple	Función compuesta
11	$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \tan f(x)[f'(x)dx] = -\ln\lvert\cos[f(x)]\rvert + C$
12	$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \cot f(x)[f'(x)dx] = \ln\lvert\sin[f(x)]\rvert + C$
13	$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C$	$\int \sec f(x)[f'(x)dx] = \ln(\sec[f(x)] + \tan[f(x)]) + C$
14	$\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + C$	$\int \csc f(x)[f'(x)dx] = \ln(\csc[f(x)] - \cot[f(x)]) + C$
15	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$	$\int \sinh f(x)[f'(x)dx] = -\cosh f(x) + C$
16	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \cosh f(x)[f'(x)dx] = \sinh f(x) + C$
17	$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$	$\int \operatorname{sech}^2 f(x)[f'(x)dx] = \tanh f(x) + C$
18	$\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$	$\int \operatorname{csch}^2 f(x)[f'(x)dx] = -\coth f(x) + C$
19	$\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$	$\int \operatorname{sech} f(x) \tanh f(x)[f'(x)dx] = \operatorname{sech} f(x) + C$
20	$\int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + C$	$\int \operatorname{csch} f(x) \coth f(x)[f'(x)dx] = -\operatorname{csch} f(x) + C$
21	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{f(x)}{a} + C$
22	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{f'(x)dx}{a^2 + [f(x)]^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{f(x)}{a} + C$
23	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{f(x)}{a} + C$

Nota. Fuente: Adaptado de Arce, Abel (2006).

Las tablas de integrales **(4.1)** y **(4.2)** son muy útiles al resolver problemas sin la utilización de un software, sin embargo, al utilizar un software matemático no son de importancia, puesto que el programa resuelve todo tipo de integrales, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.1

Resolver: $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\, dx$

Solución: Para la solución del ejemplo utilizamos la propiedad de integrales de una suma y posteriormente la primera fórmula planteada en la primera tabla de integrales, es decir;

$$\int (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx = \int 4x^3dx + \int 3x^2dx + \int 2xdx + \int dx = \frac{4x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + C$$

Simplificando se tiene: $\int (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx = x^4+x^3+x^2+x+C$

A continuación veremos la solución mediante el programa matemático wxMaxima, para resolver la integral de una función en el programa, nos dirigimos al menú **`Análisis`** en el cual se tiene una ventana emergente de todos los procesos que se puede realizar como los que ya se vio anteriormente derivar y calcular un límite, entre otros. Y luego hacemos clic en el sub menú **`Integrar`** así como se muestra en la figura adjunta, o también se puede utilizar directamente el comando **`integrate(f(x), x)`**, en el cual $f(x)$ es la función a integrar y x es la variable con respecto a la cual se realizará la integral de la función.

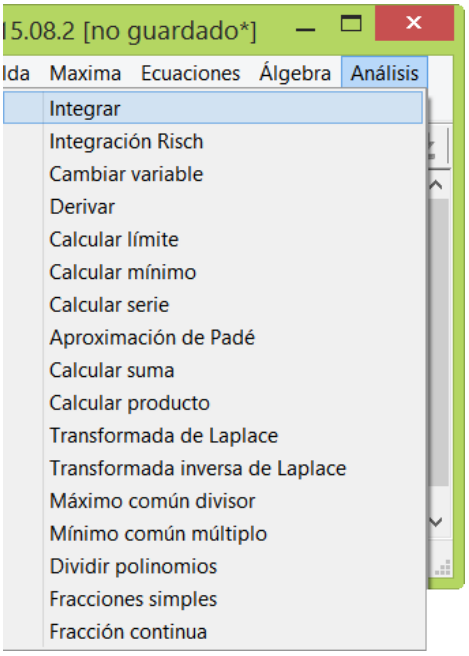


Figura 4.1: Menú integrar en wxMaxima

Luego se ingresa la función a integrar y aceptar para obtener la solución así como se muestra en las siguientes figuras:

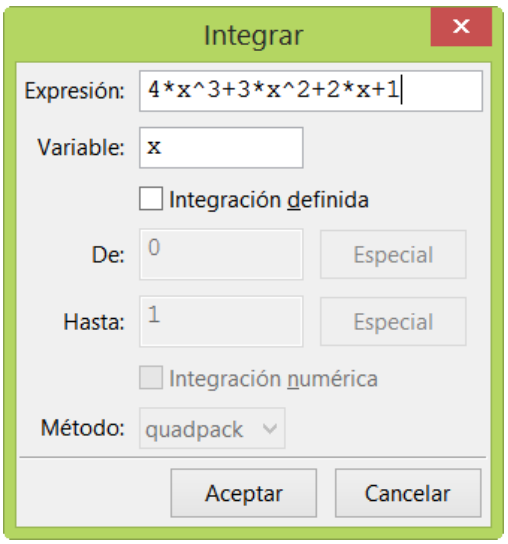


Figura 4.2: Integrar con wxMaxima

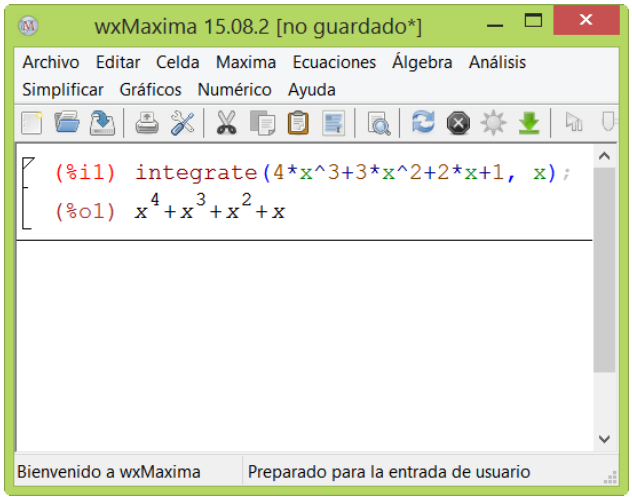


Figura 4.3: Resultado integración con wxMaxima

Ejemplo 4.2

Resolver: $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

Solución: La solución del presente problema se realiza haciendo una transformación del radical a exponencial y luego aplicando la primera fórmula, así como se muestra a continuación:

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

Usando el programa, previamente ingresamos al menú **`Análisis > Integrar`**, y en la ventana emergente ingresamos la función a integrar, por defecto la variable con respecto a la que se desarrollará la integración es x y aceptando se tendrá la solución, así como se muestra en las figuras siguientes:

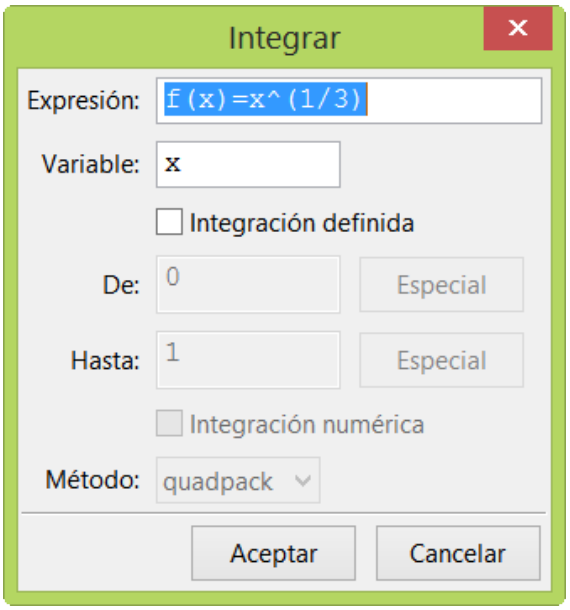


Figura 4.4: Ventana integrar en wxMaxima

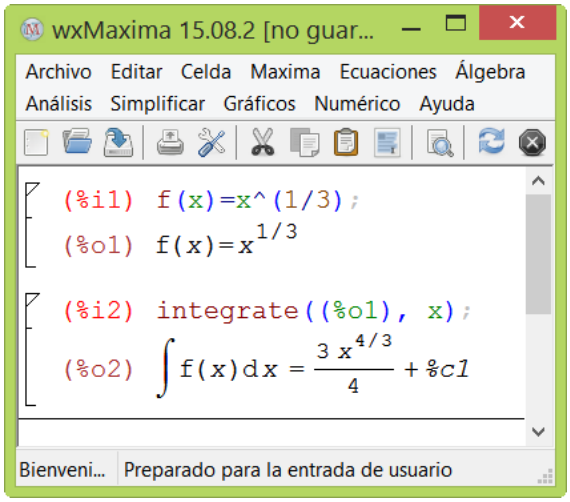


Figura 4.5: Resultado integración en xMaxima

4.4 Algunos métodos de integración

Los métodos de integración son utilizados cuando no es posible resolver directamente la integral de una función utilizando las fórmulas simples consideradas en las tablas **(4.1)** y **(4.2)**, dichos métodos de integración facilitan la solución de integrales de funciones complejas, en esta sección se hará referencia a algunos métodos de integración mostrando el ejemplo respectivo y paralelamente se darán solución utilizando el software dando a conocer la simplicidad que resulta el resolverlo para el software utilizado.

4.4.1 Método de integración por sustitución

Al integrar el producto o cociente de funciones derivables en x, como por ejemplo $\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx$, no se tiene una fórmula directa para desarrollarla, lo cual sugiere desarrollar utilizando una sustitución si el integrando se puede representar como un múltiplo constante de otra función u y de su derivada $\frac{du}{dx}$, es decir si expresamos el integrando como $f(x)$ en función de u y su derivada $\frac{du}{dx}$ e integrando con respecto a x se tiene:

$$\int f(x)\,dx = \int u\frac{du}{dx}\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int u\,du = F(u)+C$$

Véase también el siguiente teorema:

Teorema 4.1 Regla de sustitución

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I y f es contínua es I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int u\,du$$

(Thomas, Jr., George B. 2006).

Ejemplo 4.3 **Método de integración por sustitución**

Determinar la integral definida

$$\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx$$

Solución: Para la solución consideraremos los siguientes pasos:

1. Igualamos a u la función cuya variable independiente se eleva a la potencia superior respecto del valor absoluto, es decir $u = x^3+7$.
2. derivamos u respecto a x entonces se tiene: $\frac{du}{dx} = 3x^2$, y despejamos el diferencia de u que sería igual a: $du = (3x^2)dx$.
3. sustituimos en la integral u así como el du.
4. Luego se tiene: $\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx = \int u^5 du$.
5. La solución según la fórmula directa es: $\int u^5 du = \frac{u^6}{6}+C$.
6. Remplazando a la variable original se tiene: $\int u^5 du = \frac{u^6}{6}+C = \frac{(x^3+7)^6}{6}+C$.
7. En consecuencia la solución de la integral es: $\int 3x^2(x^3+7)^5\,dx = \frac{(x^3+7)^6}{6}+C$.

Usando el programa, previamente ingresamos la función y a continuación seleccionamos (%o1) que sería la expresión de la función, este previo paso de ingresar la función es para que en el resultado se muestre la función de integración así como la constante de integración. Luego nos vamos al menú **`Análisis > Integrar`** en la ventana emergente veremos que automáticamente reconoce la función a integrar es decir (%o1), por defecto la variable con respecto a la que se desarrollará la integración es ***x*** y aceptando se tendrá la solución, así como se muestra en las figuras siguientes:

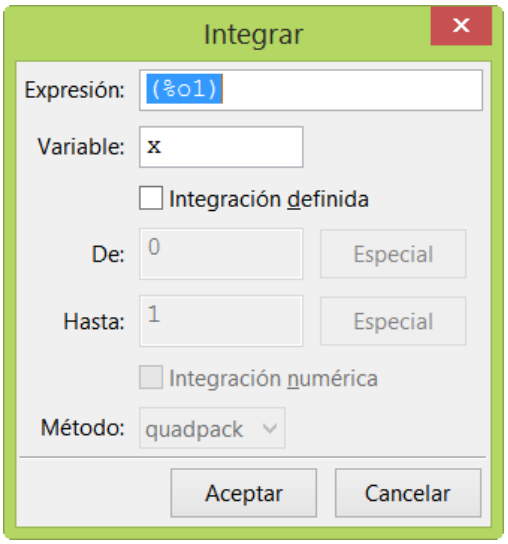


Figura 4.6: Ventana integrar en wxMaxima

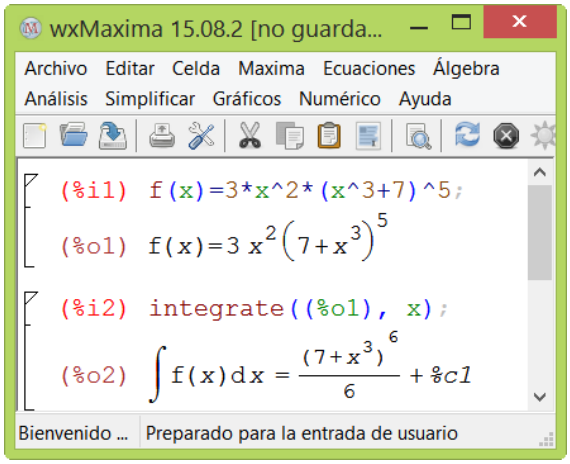


Figura 4.7: Resultado integración en wxMaxima

4.4.2 Método de integración por descomposición en fracciones parciales

Este método de integración involucra funciones racionales de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$, cuyo proceso es descomponer la función en una suma de dos o más funciones racionales más simples y luego integrarlas. Por ejemplo si se tiene $\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx$, la función integrando se puede descomponer en:

$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{4}{5(x-4)} + \frac{1}{5(x+1)}$, la segunda parte de la igualdad es llamada fracciones parciales, observe que los factores de los denominadores de las fracciones parciales son los factores de la función $g(x)$, mediante la descomposición en fracciones parciales las integrales son más simples, pudiendo integrarse de manera directa, es decir;

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx = \int \frac{4}{5(x-4)}\,dx + \int \frac{1}{5(x+1)}\,dx = \frac{4}{5}\int \frac{1}{(x-4)}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x+1)}\,dx$$

Siendo:

$$\int \frac{1}{x-4}\,dx = \log(x-4)+C \qquad y \qquad \int \frac{1}{x+1}\,dx = \log(x+1)+C$$

obtenemos:

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx = \frac{\log(x+1)}{5} + \frac{4\log(x-4)}{5} + C$$

Al igual que en procesos anteriores usando el programa, previamente ingresamos la función y a continuación seleccionamos (%o1) que sería la expresión de la función, este previo paso de ingresar la función es para que en el resultado se muestre la función de integración así como la constante de integración. Luego no vamos al menú **`Análisis > Integrar`** en la ventana emergente veremos que automáticamente reconoce la función a integrar es decir (%o1), por defecto la variable con respecto a la que se desarrollará la integración es ***x*** y aceptando se tendrá la solución, así como se muestra en las figuras siguientes:

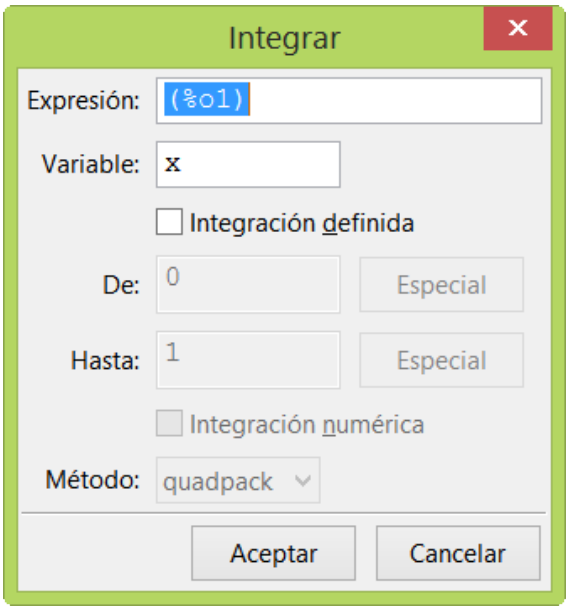


Figura 4.8: Ventana integrar en wxMaxima

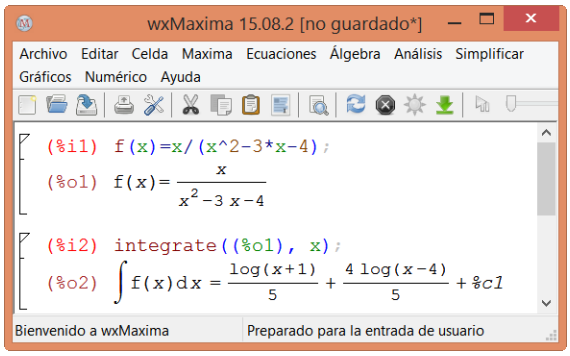


Figura 4.9: Resultado integración en wxMaxima

Nota:
El software wxMaxima utiliza los logaritmos naturales mediante la notación (log), que son los logaritmos neperianos, así se puede apreciar en la figura **4.9**.
Por otro lado Considerando la teoría bibliográfica, la respuesta sería:

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}dx = \frac{ln(x+1)}{5} + \frac{ln(x-4)}{5} + C$$

Condiciones para descomponer una función racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ en fracciones parciales

1. El grado de $f(x)$ debe ser menor que el grado de $g(x)$.

   Si se cumple entonces la función recibe el nombre de fracción propia.

   Si no se cumple, entonces se debe dividir $f(x)$ entre $g(x)$ (se utiliza la división larga) y se trabaja con el cociente como un polinomio y con el término que contiene el residuo.

2. Los factores de $g(x)$ deben ser determinados en la forma $(ax+b)^n$ ó $(ax^2+bx+c)^n$, donde $n \geq 1$ y (ax^2+bx+c) es una ecuación cuadrática irreductible, es decir; no tiene raíces reales.

   Si se cumple, se procede a encontrar las fracciones parciales.

   Si no se cumple, no se puede determinar las fracciones parciales y la técnica no se puede aplicar.

Si el denominador $g(x)$ de la función racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ ha sido factorizado completamente según el paso 2 indicado anteriormente, entonces se puede utilizar la siguiente pauta para determinar los términos de la suma de la fracción parcial:

Formas para componer fracciones parciales de $\frac{f(x)}{g(x)}$

Cuando $g(x)$ puede ser factorizada por factores de la forma $(ax+b)^n$ ó $(ax^2+bx+c)^n$, la expansión de la fracción parcial(FP) de $\frac{f(x)}{g(x)}$ se considera de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \Sigma \text{ (FPs) para todos los factores } (ax+b)^n + \Sigma \text{ (FPs) para todos los factores } (ax^2+bx+c)^n$$

1. Para cada factor distinto de $g(x)$ de la forma $(ax+b)^n$, con $n \geq 1$, su distribución a la suma de fracciones parciales es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(ax+b)^i} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

   donde cada A_i es un número real.

2. Para cada factor distinto de $g(x)$ de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, con $n \geq 1$, su distribución a la suma de fracciones parciales es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i x + B_i}{(ax^2+bx+c)^i} = \frac{A_1 x + B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2+bx+c)^n},$$

   Donde cada A_i y B_i son números reales.

4.4.3 Método de integración por partes

El método de integración por partes es un método que se aplica a funciones que tengan en su estructura un producto de funciones, para la aplicación de este método se utiliza la siguiente fórmula:

Fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Esta fórmula expresa una integral de la forma $\int udv$, y está expresada en términos de una segunda integral $\int vdu$, el cual con una elección adecuada de u y dv, la segunda integral podría ser más fácil de evaluar que la primera. Para utilizar la fórmula, puede haber varias elecciones posibles para u y dv. Veamos un ejemplo que ilustra la técnica.

Ejemplo 4.4

Resolver la integral $\int x\cos x\, dx$

Solución:

Según la fórmula de integración por partes es necesario elegir u y dv, para lo cual consideramos la siguiente elección:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{cosx\,dx}_{dv} \Longrightarrow \begin{cases} u = x & \longrightarrow \quad du = dx \\ dv = cosx\,dx & \longrightarrow \quad \int dv = \int cosx\,dx \longrightarrow v = senx \end{cases}$$

haciendo la sustitución en la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int x\,cosx\,dx = x\,senx - \int senx\,dx = x\,senx - (-cosx) + C = x\,senx + cosx + C$$

Veamos que pasa si consideramos otra elección como la que se tiene a continuación:

$$\int \underbrace{cosx}_{u}\underbrace{x\,dx}_{dv} \Longrightarrow \begin{cases} u = cosx & \longrightarrow \quad du = -senx\,dx \\ dv = x\,dx & \longrightarrow \quad \int dv = \int x\,dx \longrightarrow v = x^2 \end{cases}$$

$$\int x\,cosx\,dx = x^2\,cosx + \int x^2\,senx\,dx$$

se puede ver que la elección no es buena, puesto que en lugar de obtener una integral más sencilla de integrar ésta se complica, por tanto nos quedamos con la primera elección.

Nota:

Al realizar la elección de u y dv es necesario considerar que la función u se debe derivar y dv sera la función a integrar, por tanto debemos elegir la función a integrar más sencilla y también que según la fórmula al sustituir $\int v\,du$ sea más simple de integrar, caso contrario debemos de realizar otra elección de u y dv.

Veamos la solución de $\int x\,cosx\,dx$ utilizando el programa wxMáxima.

Para la solución seguiremos los pasos mencionados anteriormente:

Previamente ingresamos la función y a continuación seleccionamos (%o1) que sería la expresión de la función, este previo paso de ingresar la función es para que en el resultado se muestre la función de integración así como la constante de integración. Luego nos vamos al menú **`Análisis > Integrar`** en la ventana emergente veremos que automáticamente reconoce la función a integrar es decir (%o1), por defecto la variable con respecto a la que se desarrollará la integración es x y aceptando se tendrá la solución, así como se muestra en las figuras siguientes:

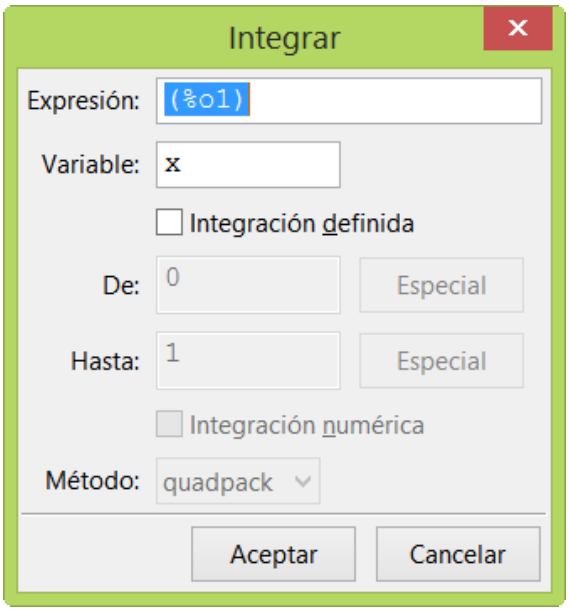


Figura 4.10: Ventana integrar en wxMaxima

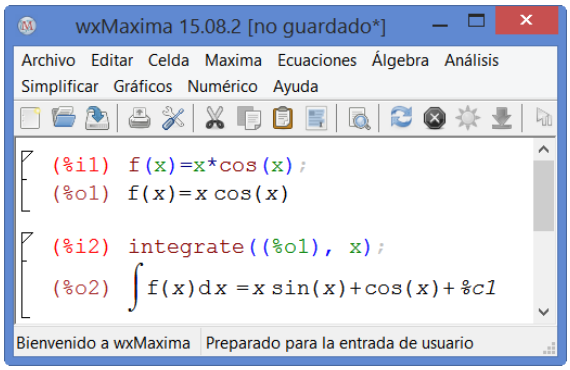


Figura 4.11: Resultado integración en wxMaxima

4.4.4 Método de integración por sustitución trigonométrica

La sustitución trigonométrica se realiza en integrales que incluyan las siguientes expresiones:

Sustitución trigonométrica - expresiones del integrando

$$\sqrt{a^2-x^2} \quad \ldots\ldots (4.1)$$

$$\sqrt{a^2+x^2} \quad \ldots\ldots (4.2)$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \quad \ldots\ldots (4.3)$$

Para las expresiones anteriores las sustituciones de la variable x respectivamente son:

Sustitución trigonométrica - expresiones de sustitución

$$x = a\,\text{sen}\,\theta \quad \ldots\ldots (4.4)$$

$$x = a\tan\theta \quad \ldots\ldots (4.5)$$

$$x = a\sec\theta \quad \ldots\ldots (4.6)$$

El proceso y resultado de la sustitución en función de la nueva variable respectivamente se muestra a continuación:

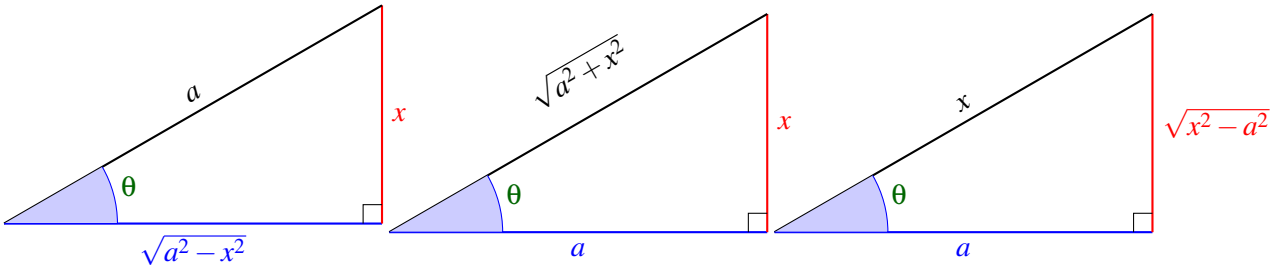
Sustitución trigonométrica - resultado de sustitución

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\operatorname{sen}\theta)^2}=\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}=\sqrt{a^2(\cos^2\theta)}=a\cos\theta \quad (4.7)$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta)}=a\sec\theta \quad (4.8)$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{(a\sec\theta)^2-a^2}=\sqrt{(a^2\sec^2\theta)-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{a^2(\tan^2\theta)}=a\tan\theta \quad (4.9)$$

Las sustituciones realizadas provienen de los triángulos trigonométricos que se muestran a continuación:



$x=a\operatorname{sen}\theta$
$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$

$x=a\tan\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec\theta$

$x=a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$

Ejemplo 4.5

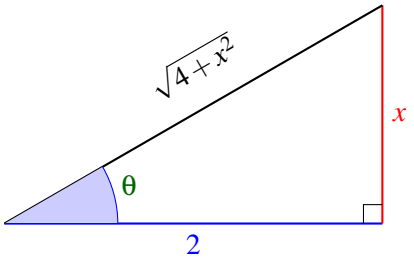
Resolver la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Solución:

Para resolver el ejercicio en primer lugar analizamos que forma tiene la función, y luego utilizamos la función a sustituir, vemos que es del segundo tipo en consecuencia la sustitución para la variable "x" es $x=a\tan\theta$, donde $a=2$, consecuentemente; $dx=2\sec^2\theta$, por tanto se tendrá lo siguiente:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}=\int\frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{4+(2\tan\theta)^2}}=\int\frac{2\sec^2\theta}{2\sec\theta}=\int\sec\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

Observe que la solución se encuentra en función del ángulo θ, lo cual debemos de retornar a la variable original, para dicho efecto consideramos el triángulo trigonométrico según la sustitución realizada.



Según el resultado debemos obtener $\sec\theta$ y $\tan\theta$ del triángulo trigonométrico, cuyos valores son:
$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ y $\tan\theta = \frac{x}{2}$, lo cual sustituyendo en la respuesta obtenida resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

El ejemplo anterior mediante el programa wxMaxima es resuelto rápidamente como veremos a continuación: Ya conocido el proceso a seguir ingresamos la función y a continuación seleccionamos (%o1) que sería la expresión de la función, luego nos vamos al menú **`Análisis > Integrar`** en la ventana emergente veremos que automáticamente reconoce la función a integrar es decir (%o1), por defecto la variable con respecto a la que se desarrollará la integración es ***x*** y aceptando se tendrá la solución, así como se muestra en las figuras siguientes:

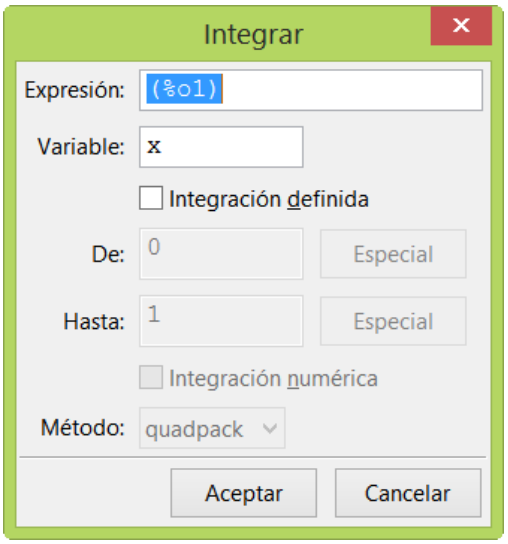


Figura 4.12: Ventana integrar en wxMaxima

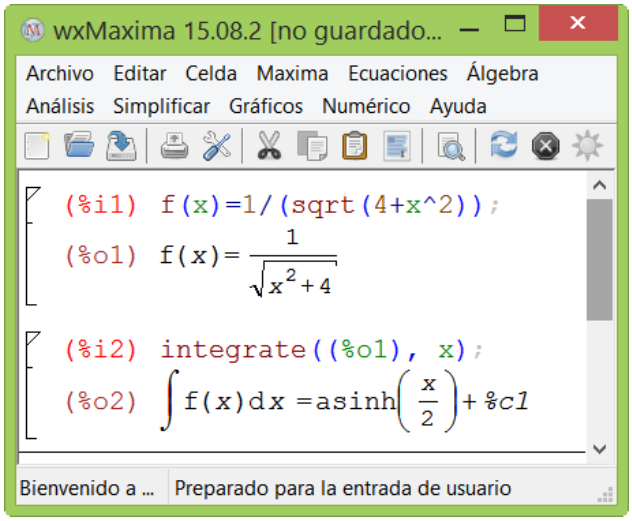


Figura 4.13: Resultado integración en wxMaxima

Como se puede apreciar máxima utiliza la integral directa de la función, puesto que una de las fórmulas de integración es:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

También por identidades trigonométricas tenemos:

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad -\infty < x < \infty$$

Por consiguiente en nuestro resultado realizamos el arreglo siguiente:
$\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| = \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)\right| = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo cual vemos que es la misma respuesta al resultado que nos brinda el programa máxima.

Problemas propuesto de integrales indefinidas

A continuación se propone una serie de integrales con sus respectivas respuestas el cual debe comprobar mediante la aplicación del programa wxMaxima.

1. $\int x^3+3\,dx=\frac{x^4}{4}+3x+C$
2. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx=3\log(x+2)+2\log(x-2)+C$
3. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx=\frac{3\log(2x+1)}{4}-\frac{\log(2x-1)}{4}+\log x+C$
4. $\int \frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\,dx=\frac{3\log(x+1)}{16}-\frac{3\log(x-1)}{16}-\frac{3x^2+3x-2}{8x^3+8x^2-8x-8}+C$
5. $\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx=-\arctan x-\frac{1}{x}+C$
6. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
7. $\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx=-\frac{\cos(5x)-5\cos x}{10}+C$
8. $\int \log x\,dx=x\log x-x+C$
9. $\int e^{5x}\,dx=\frac{e^{5x}}{5}+C$
10. $\int x^3\cos x\,dx=\left(x^3-6x\right)\sin x+\left(3x^2-6\right)\cos x+C$
11. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx=2\left(\frac{\arctan\sqrt{x}x}{2}-\frac{\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}}{2}\right)+C$
12. $\int x^2e^{-x}\,dx=\left(-x^2-2x-2\right)e^{-x}+C$
13. $\int x^x\log x\,dx=\int x^x\log x\,dx+C$
14. $\int \cos x\log x\,dx=\log x\sin x-\int\frac{\sin x}{x}\,dx+C$
15. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{a^2\operatorname{asinh}\left(\frac{x}{|a|}\right)}{2}+\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+C$
16. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx=-\arcsin\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}+C$
17. $\int \frac{1}{\sin x\tan x}\,dx=-\frac{1}{\sin x}+C$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-x^{\frac{1}{3}}}\,dx=6\left(\frac{2\sqrt{x}+3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}}{6}+\log\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right)\right)+C$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\,dx=\frac{\log\left(\sqrt{1-e^x}-1\right)-\log\left(\sqrt{1-e^x}+1\right)}{\log e}+C$
20. $\int \frac{1}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{1}{3\sqrt{4x^2-24x+27}}-\frac{x}{9\sqrt{4x^2-24x+27}}+C$

4.5 Aplicaciones de la integral indefinida a las leyes de crecimiento y decrecimiento

Muchos fenómenos de crecimiento y decrecimiento son expresados mediante una ley dada por $\frac{dA}{dt} = kA$, donde k es una constante de proporcionalidad. Si A aumenta cuando t aumenta, entonces $k > 0$ y se tiene la ley del crecimiento natural; así mismo, si A disminuye cuando t aumenta, entonces $k < 0$ y se tiene la ley de decaimiento natural.

Desarrollando la ecuación anterior se tiene:

Ley de crecimiento y decrecimiento

$$\frac{dA}{A} = kdt,\ A(t_0) = A_0 \tag{4.10}$$

llamado también problema con valores iniciales, integrando ambos miembros tenemos:

$\int \frac{dA}{A} = \int kdt \Longrightarrow \ln A = kt + C \Longrightarrow A = e^{kt+C} \Longrightarrow A = e^{kt}e^{C}$, consecuentemente se tiene:

Ley exponencial de crecimiento y decrecimiento

$$A = C_0 e^{kt},\ \text{donde}\ \ C_0 = e^{C} \tag{4.11}$$

Esta ley exponencial nos permite **MODELAR** problemas de Crecimiento poblacional, decaimiento radioactivo, enfriamiento de cuerpos, descarga de un condensador, entre otros.

La solución de la ecuación **(4.10)** (Ley de crecimiento y decrecimiento), cuya solución es la ecuación exponencial **(4.11)** se muestra adjunto en la figura, primeramente se consideró la ecuación diferencial, a continuación se utilizó el comando **ode2** que significa ecuaciones diferenciales ordinarias, donde la orden es desarrollar la ecuación **ec1** en la variable **A** respecto a la variable **t** que es el tiempo.

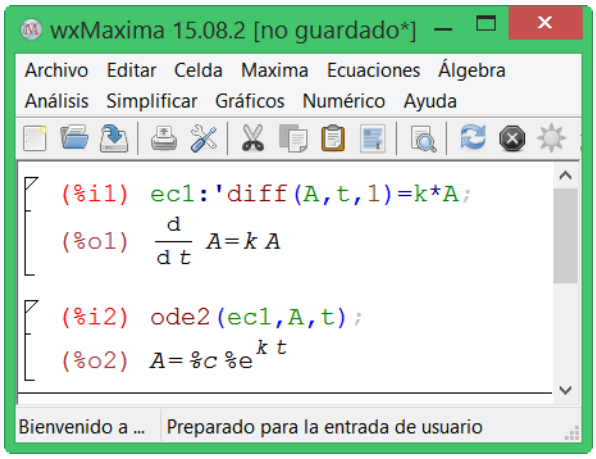


Figura 4.14: Solución Ley de crecimiento y decrecimiento

Ejemplo 4.6 **Crecimiento de población**

Supongamos que la tasa de cambio (razón de cambio) del tamaño de la población mundial es proporcional al tamaño de la población y que ésta crece a una tasa anual aproximada del 2 %. Dado que la población mundial en 1965 era de 3 mil millones y suponiendo que la tasa de crecimiento permanece constante, ¿cuál será la población en el año 2016?

Solución:

Sea P(t) el tamaño de la población mundial en un tiempo t medido en años, luego según el enunciado del problema se tiene: $\frac{dP}{dt} = kP$ además como la tasa de crecimiento es 2 % se tiene: $\frac{dP}{dt} = (0,02)P$

1. Realizamos el ingreso de la ecuación de crecimiento considerando el porcentaje de crecimiento de $2\% = 0,02$.
2. Mediante el comando **ode2** se determina la solución de la ecuación.
3. En base a la solución anterior se ingresa la función **P(t)** y se sustituye el valor de la constante **C** dada en el enunciado.
4. Se determina el tiempo t para el año 2006 considerando que $t = 0$ para el año 1965 donde inicia con una población de 3 mil millones y restando los años resulta 41.
5. Evaluamos la función de crecimiento poblacional para el tiempo $t = 41$.

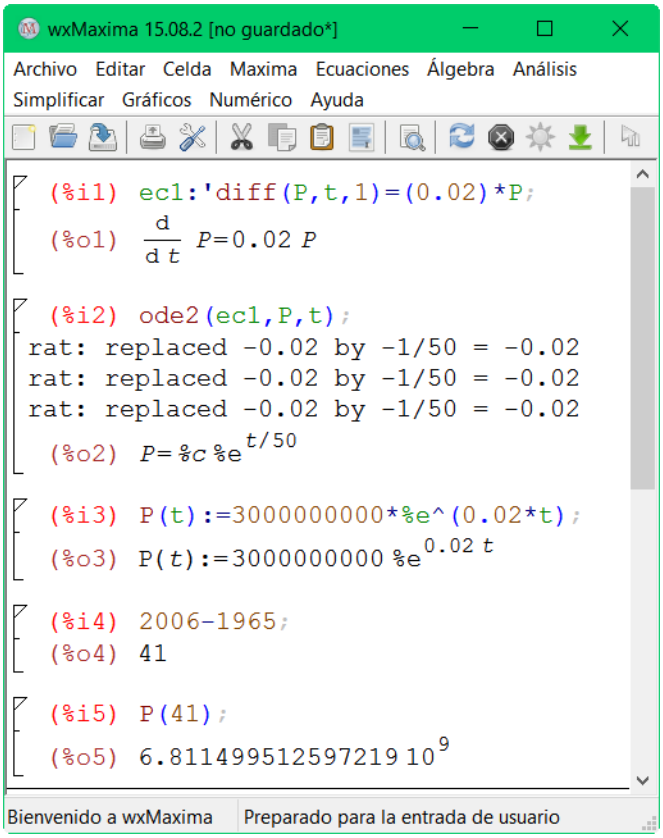


Figura 4.15: Desarrollo - ejemplo de crecimiento poblacional

Según el resultado obtenido se concluye que en el año 2006 la población mundial será de 6811499512,597219 (Seis mil ochocientos once mil millones, cuatrocientos noventa y nueve mil, quinientos doce habitantes).

4.6 Función marginal

En aplicaciones a los negocios la tasa de cambio de una función con respecto a alguna variable se determina fácilmente derivando dicha función. El problema ahora consiste en encontrar la función cuya tasa de cambio se conoce. Así por ejemplo, dadas las funciones de costo marginal $C'(x)$ y de ingreso marginal $R'(x)$ puede ser necesario conocer las funciones de costo total y de ingreso total, para tal efecto, bastará integrar las

funciones marginales; es decir:

$$\int C'(x)dx = C(x) + K \tag{4.12}$$

en donde la constante K se determina especificando una condición inicial, que frecuentemente se hace en términos de un costo fijo o de gastos generales; es decir, cuando $x = 0$.
Análogamente se tiene:

$$\int R'(x)dx = R(x) + K \tag{4.13}$$

donde K se encuentra por condición inicial asumiendo que el ingreso es cero cuando la demanda es cero.

Ejemplo 4.7

La función de costo marginal para la producción de x unidades es $C'(x) = 10 + 24x - 3x^2$. Si el costo total para producir una unidad es 25, hallar la función del costo total y del costo promedio.

Solución:
Puesto que se tiene la tasa de cambio, utilizando la ecuación **(4.12)** encontraremos la ecuación de costo mediante los siguientes pasos:

1. Ingresamos la función de costo al programa para encontrar la integral.
2. Determinamos la integral cuyo resultado se muestra, el cual vendría a ser el costo, es decir $C(x) = -x^3 + 12x^2 + 10x + C$.
3. Ingresamos la función de costo para considerar las condiciones iniciales.
4. La condición inicial es cuando se produce una unidad, entonces buscamos $c(1)$, cuyo resultado es $c + 21$.
5. Luego como para la producción de una unidad es 25 ingresamos la ecuación $c + 21 = 25$.

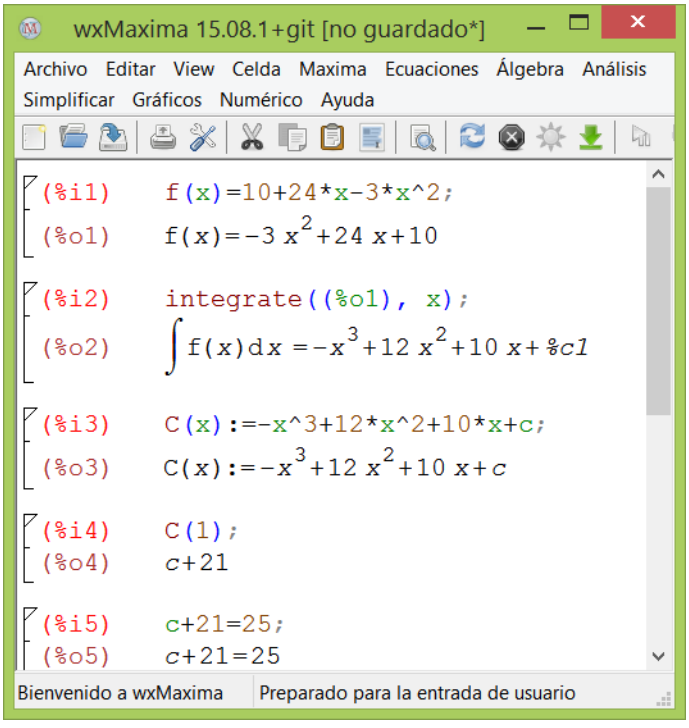


Figura 4.16: Proceso para la determinación del costo

6. A continuación resolvemos la ecuación, de donde el valor de **c** es igual a cuatro, $\mathbf{c} = \mathbf{4}$, que se obtiene ingresando al menú **`Ecuaciones>Resolver`**.

7. Conociendo el valor de **c** tenemos la función de costo pedida.

8. Para el costo promedio dividimos el costo entre Ingresamos la función de costo $\mathbf{C(x)}$ entre **x**.

9. por ultimo para tener el resultado simplificado ingresamos al menú **`Simplificar`**, luego **`Expandir expresión`** obtenemos el resultado reducido $\overline{C(x)} = -x^2 + 12x + \frac{4}{x} + 10$, que es el costo promedio.

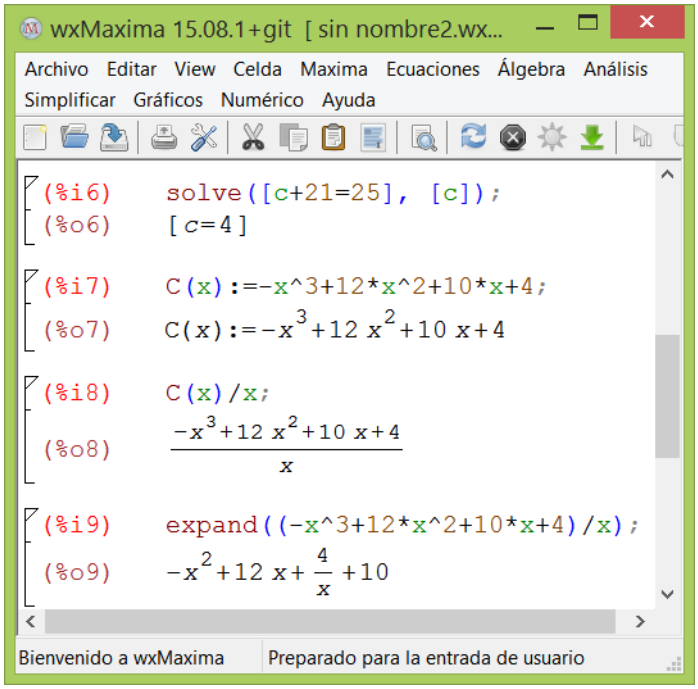


Figura 4.17: Proceso para la determinación del costo

4.7 Interés continuo

Tasa anual equivalente (TAE)

El TAE es una anualización del tipo de interés efectivo que ha sido realmente utilizado en determinada operación financiera. A través del TAE podremos comparar distintos productos financieros semejantes ofrecidos por entidades distintas. El TAE es un tipo de interés anual y compuesto que se acerca más al tipo de interés real de la operación que se esté realizando, pero en general no coincide con él prácticamente nunca por la incidencia que tienen los gastos y comisiones que pagan acreedor y deudor (sobre todo el deudor). Si queremos conocer el TAE de una operación financiera que ofrece un tipo r_n (interés anual capitalizable n veces al año), deberemos resolver la siguiente ecuación:

$$TAE = \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n - 1 \tag{4.14}$$

Conceptualizado por: Susana Lopez G.

Capitalización continua

Considerando que la capitalización de intereses son anuales, semestrales, mensuales, semanales o diarias, si se capitaliza en un intervalo muy pequeño, entonces se capitaliza intereses de forma continua, si se despeja el interés anual capitalizable de la tasa anual equivalente ecuación **(4.14)** se tiene:

$$r_n = n\left[(1 + TAE)^{\frac{1}{n}} - 1\right] \tag{4.15}$$

Para calcular la tasa de capitalización continua o instantanea calculamos el límite, entonces se tiene:

$$r = \lim_{n\to\infty} n\left[(1 + TAE)^{\frac{1}{n}} - 1\right] \tag{4.16}$$

cuyo resultado es: $r = \ln(1 + TAE)$, de donde $TAE = e^r - 1$, en consecuencia al invertir cierto capital C_0 durante cierto periodo de tiempo t a la tasa anual instantánea r, se obtiene el capital C_t, cuya ecuación es:

Capitalización continua

$$C_t = C_0 e^{rt} \tag{4.17}$$

donde t está anualizado

Ejemplo 4.8

Ricardo depositó \$32000.00 al 9 % anual capitalizable continuamente, determine el monto y el interés total ganado al cabo de $2\frac{1}{2}$ años.

Solución:

Para el presente ejercicio veamos la solución con el programa GeoGebra para poder visualizar la representación gráfica, considerando los datos del problema, se tiene el capital $C_0 = 32000$, al 9 % para un tiempo general t se tiene: $C(t) = 32000e^{0,09t}$, cuya gráfica se representa a continuación haciendo uso del programa mediante el comando `c(t)=32000e^(0.09t)`:

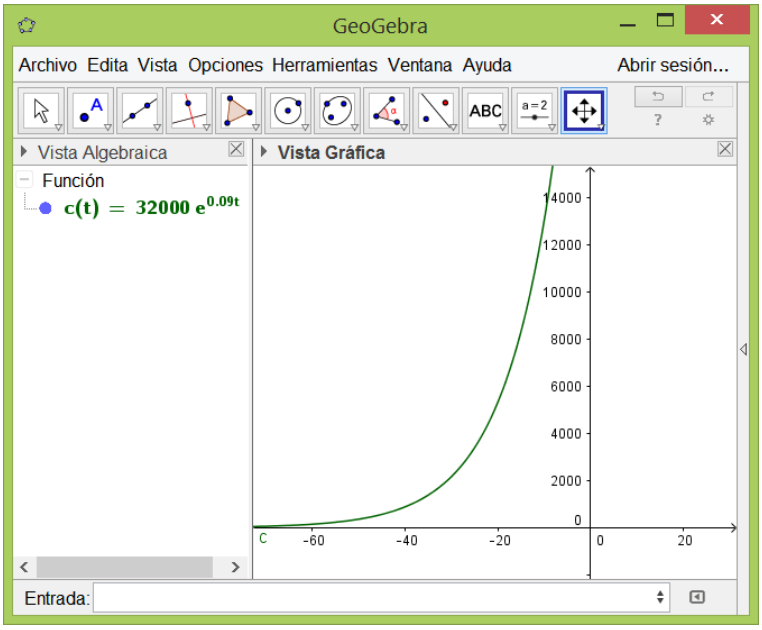


Figura 4.18: Función general en un tiempo t de capitalización continua

A continuación en la figura adjunta se muestran los resultados pedidos del problema, según los pasos que se indica. Para encontrar el monto a los $2\frac{1}{2}$ años reemplazamos en la función de costo $c(t)$ el tiempo dado, ingresando en la barra de entrada $c(2{,}5)$ con el comando **`c(t)`**, cuyo resultado es 40074.33, que es el monto total en 2,5 años, y para determinar el interés realizamos la diferencia del monto total menos el capital invertido, es decir $40074{,}33 - 32000{,}00 = 8074{,}33$, que sería el interés total ganado en 2,5 años a una tasa anual del 9 %.

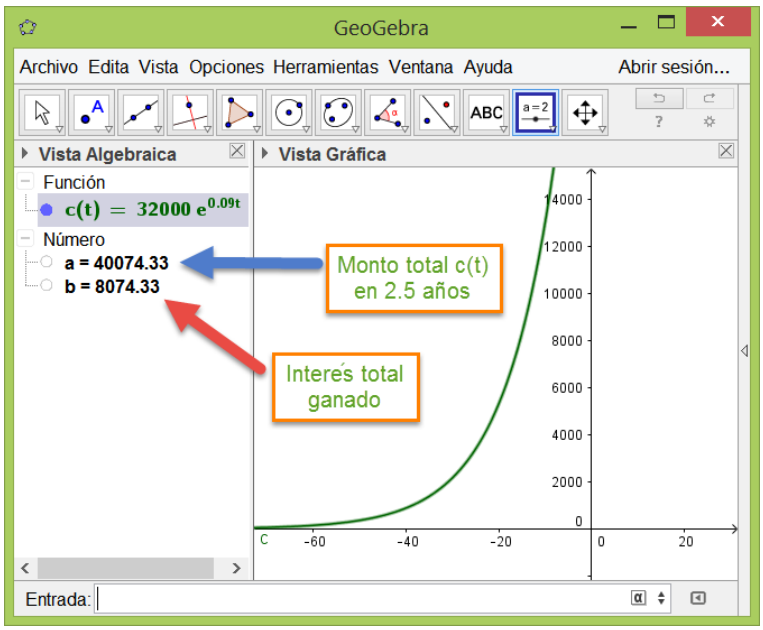


Figura 4.19: Función general en un tiempo t de capitalización continua

Ejemplo 4.9

¿Qué capital habría que invertir a una tasa de 26,5 % compuesto continuamente para disponer de $65000 dentro de 6 meses?

Solución:

1. Según los datos del problema reemplazando en la ecuación **(4.17)** de capitalización continua se tiene $65000 = C_0 e^{0{,}265(\frac{1}{2})}$, esta ecuación la ingresamos en el programa wxMaxima.

2. Luego seleccionando la ecuación y haciendo clic derecho elegimos **resolver** o también ingresando al menú. **`Ecuaciones>Resolver`** y elegimos incógnita **c** puesto que la ecuación esta en función de **c**.

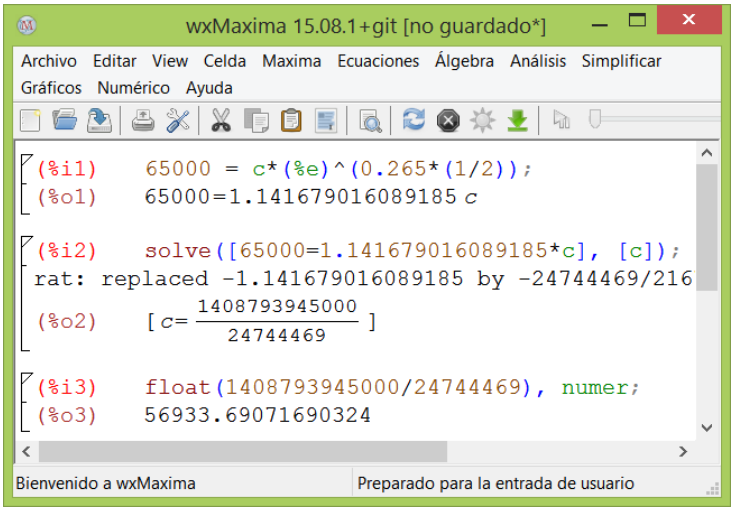


Figura 4.20: Ejemplo Inversión de capital

Finalmente el resultado del tercer paso es seleccionando la fracción y hacemos clic en el botón derecho y seleccionamos **A real** y de esa manera obtenemos el resultado $C_0 = 56933{,}690$ que es el capital a invertir.

5 La integral definida

Este capítulo se basa en el cálculo de áreas bajo una curva limitadas entre dos puntos, las cuales son evaluadas mediante integrales, tenemos diferentes definiciones sobre la integral definida, entre ellas citamos las siguientes:

Definición 5.1 La integral definida

Sea $f(x)$ una función con una antiderivada que denotaremos por $F(x)$. Sean a y b dos números reales tales que $f(x)$ y $F(x)$ existen para todos los valores de x en el intervalo cerrado con puntos extremos a y b. Entonces, la **integral definida** de **f**(**x**) desde **x** = **a** hasta **x** = **b** se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

Los números a y b se denominan los **límites de integración**, a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Por lo regular $a < b$, pero esto no es esencial.

(Jagdish C. Arya/Robin W. Lardner 2009).

Por su parte (Ernest F. Haussler, Jr. y Richard S. Paul 2003) la define como:

Definición 5.2 La integral definida

El límite común de $\overline{S_n}$ y $\underline{S_n}$ cuando $n \to \infty$, si éste existe, se llama **integral definida** de f sobre $[a,b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5.2}$$

Los números a y b se llaman **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. El símbolo x se llama **variable de integración** y $f(x)$ es el **integrando**.

(Ernest F. Haussler, Jr., Richard S. Paul 2003).

La definición anterior hace referencia a $\overline{S_n}$ y $\underline{S_n}$ que vienen a ser sumatorias de las áreas rectangulares que en el límite son iguales a la unidad, a medida que crece la cantidad de rectángulos se va formando el área bajo la curva que es el propósito de la integral, véase la siguiente figura

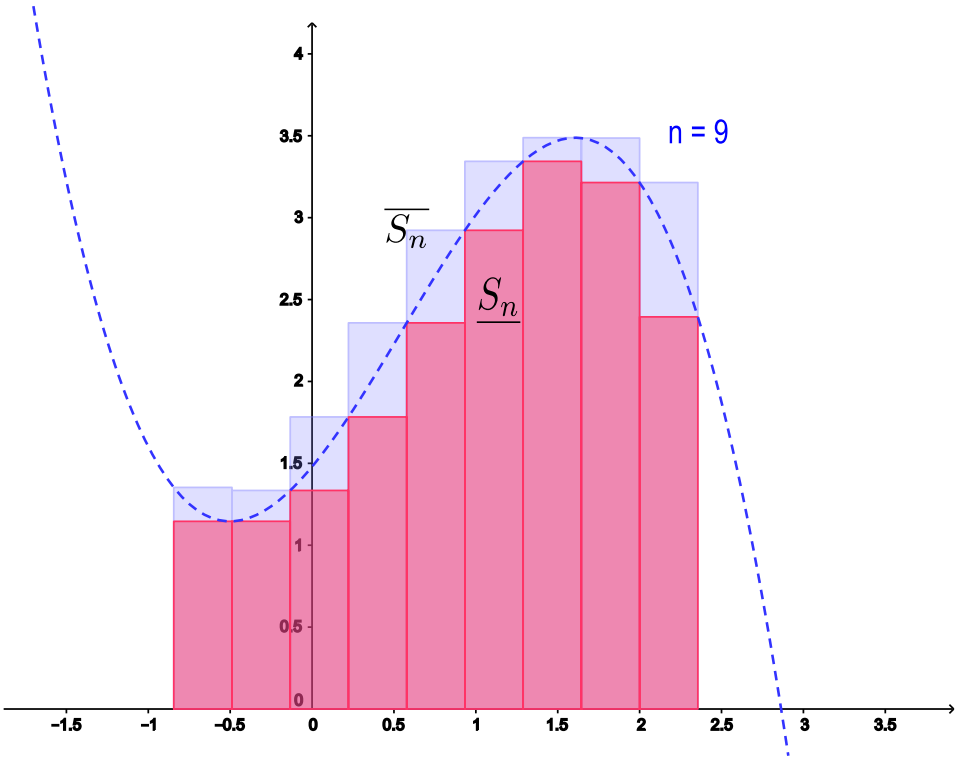


Figura 5.1: La integral definida

5.1 Teorema fundamental del cálculo

Teorema 5.1 Teorema Fundamental del cálculo

Sea $f(x)$ una función continua no negativa en $a \leq x \leq b$ y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces A, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida

$$A = \int_a^b f(x)dx = F[b] - F[a]$$

(Jagdish C. Arya/Robin W. Lardner 1992).

Según las definiciones anteriores vemos que hacen referencia al teorema fundamental del cálculo, puesto que la integral definida está definida entre dos puntos a y b, las propiedades de la integral definida que a continuación se verán, son similares a las propiedades de integrales indefinidas así mismo las reglas de integración tratadas se utilizan también para las integrales definidas y que por medio del teorema fundamental del cálculo son evaluadas entre los puntos a y b obteniéndose un valor numérico.

5.2 Propiedades

En la integral definida se tiene las siguientes propiedades:

Propiedades de la integral definida

Sea la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ entonces se tiene que:

1. Si $a > b$, entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. Si $a = b \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$.
3. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$.
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, donde k es una constante.
5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.
   La variable de integración es una "variable muda" en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, esto es, el mismo número.
7. Si f es continua sobre un intervalo I, y a, b y c están en I, entonces

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

.

Fuente: Elaboración basada en (Ernest F. Haussler, Jr., Richard S. Paul 2003).

5.3 Aplicación al crecimiento poblacional

Generalmente una población esta considerado como un conjunto o colección de entidades los cuales puede ser material o inmaterial en la cual estamos considerados, veamos la siguiente definición:

Definición 5.3 Población

Una **población** es un conjunto de mediciones o cómputos de una única variable, tomado sobre todos los individuos que se ha especificado pertenecen a la población

(M. Little, Jackson Hills 2002).

En referencia al crecimiento poblacional nos basaremos en los entes inmateriales o personas, si la población aumenta indicaremos que se tiene un crecimiento caso contrario diremos que la población decrece.
Según la publicación de la (**FAO** 2002). indica acerca del crecimiento poblacional lo siguiente:

La población mundial aumenta a una tasa alarmante. Salvo que la tasa de crecimiento disminuya, el mundo enfrentará problemas sumamente serios.
La figura 1 ilustra la tasa de aumento de la población en los últimos 2000 años. La población mundial era cerca de 250 millones hace 2000 años. Después de tomar 16 siglos para duplicarse a 500 millones, en dos siglos y medio se duplicó para llegar a 1000 millones en 1850, y nuevamente se duplicó en un siglo para alcanzar 2000 millones de personas en 1950. Ahora la población del mundo se duplica cada 35 años y en 1990 llegó a 5000 millones.

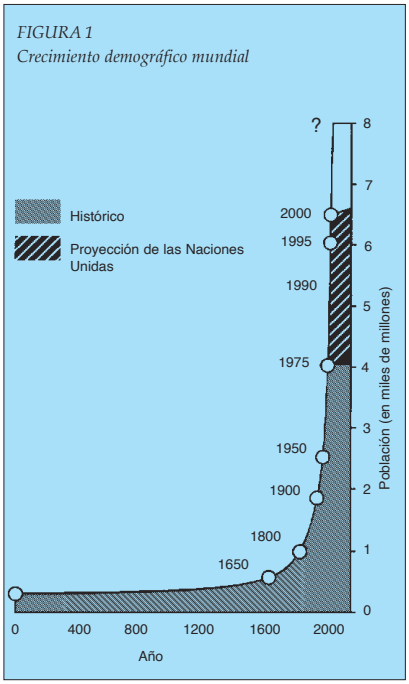


Figura 5.2: Fuente: Publicación FAO 2002

Podemos apreciar en la representación gráfica que considera la FAO es una curva exponencial creciente.
A continuación veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1

Un estudio indica que dentro de **x** meses la población de cierta ciudad crecerá a la razón de $2+6\sqrt{x}$ personas por meses. ¿En cuánto crecerá la población durante los próximos 4 meses?.

Solución:

Puesto que se tiene un crecimiento poblacional igual a $2+6\sqrt{x}$ personas por mes se tendrá la siguiente ecuación de crecimiento poblacional $\frac{dP}{dx} = 2+6\sqrt{x}$, esto considerando que x es el tiempo para resolver el presente problema ingresemos al programa GeoGebra, a continuación realicemos los siguientes paso

1. Ingresamos la función que nos suministra en el enunciado $\frac{dP}{dx} = 2+6\sqrt{x}$, el cual consideramos como $y = 2+6\sqrt{x}$, luego se tendrá la gráfica de la función.

2. Como el objetivo es encontrar la población durante los cuatro meses entonces de la ecuación de crecimiento se debe conseguir $\int_0^4 dP = (2+6\sqrt{x})dx$, de donde se tendrá la población, entonces a continuación ingresamos el siguiente comando `Integral[f, 0, 4]`.

3. Según el ingreso del comando anterior se tiene el resultado $P = 40$, como se muestra en la figura adjunta, con lo cual queda resuelto el problema.

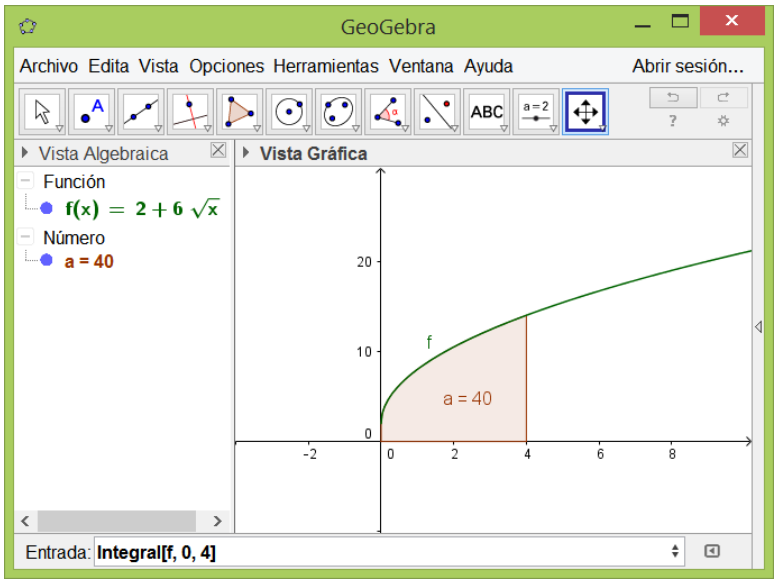


Figura 5.3: Crecimiento poblacional durante 4 meses

5.4 Aplicación a la confiabilidad de productos

La confiabilidad esta basado en la aceptación de algo o cuanto podemos confiar, la Real Academia Española define de la siguiente forma:

Definición 5.4 Confiabilidad

1. f. Cualidad de confiable.
2. f. fiabilidad (|| probabilidad de buen funcionamiento de algo).

(RAE 2016).

En consecuencia si hablamos de confiabilidad de productos sería a cuan aceptable o cuál es la probabilidad de duración. Por otro lado consideremos la relación que se tiene entre la probabilidad y el cálculo integral, según Ángel Gutiérrez J. C. se tiene:

Relación entre la probabilidad y el cálculo integral

La probabilidad de que una variable aleatoria continua esté en un intervalo entre dos números **a** y **b** con a<b, está dada por la integral de la función de densidad es ese intervalo, así:

$$P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

Fuente: (Ángel G. Estadística General Aplicada 2007).

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.2

La función de densidad de probabilidad para la duración de las bombillas eléctricas fabricadas por cierta compañía es $f(x) = 0,01e^{-0,01x}$, donde x representa la duración (en horas) de una bombilla seleccionada de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una bombilla seleccionada de modo aleatorio esté:

a) Entre 50 y 60 horas?

b) Sea menor o igual que 60 horas?

c) Sea mayor que 60 horas?

Solución:

- **Parte a)** Puesto que x representa duración en horas, entonces para esta parte su variación será de 50 a 60 en consecuencia se tiene la siguiente probabilidad $P[50 \leq x \leq 60] = \int_{50}^{60} f(x)dx$, reemplazando la función de densidad se tiene: $P[50 \leq x \leq 60] = \int_{50}^{60} 0,01e^{-0,01x}dx$ para la solución ingresamos la función al programa GeoGebra `y=0.01*e^(-0.01*x)` y utilizando el comando `Integral[f, 50, 60]` se tiene:

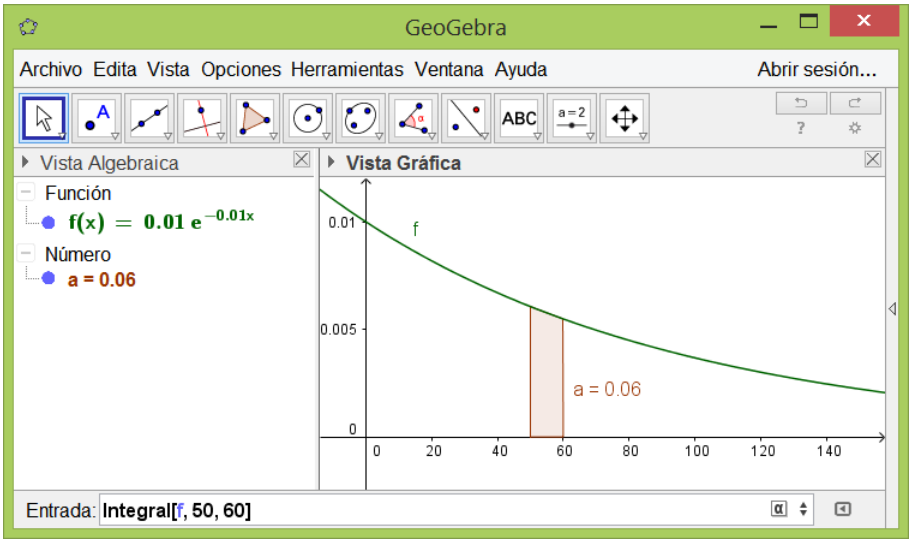


Figura 5.4: Solución parte a)

Expresando el resultado en porcentaje se tiene 5,77 % en consecuencia se concluye indicando que el 5,77 % de bombillas fabricadas tendrán una duración entre 50 y 60 horas.

- **Parte b)** Para la solución de la segunda parte consideramos la siguiente probabilidad $P[0 \leq x \leq 60] = \int_{0}^{60} f(x)dx$, reemplazando la función de densidad se tiene: $P[0 \leq x \leq 60] = \int_{0}^{60} 0,01e^{-0,01x}dx$ para

la solución ingresamos la función al programa GeoGebra **`y=0.01*e^(-0.01*x)`** y utilizando el comando **`Integral[f, 0, 60]`** se tiene:

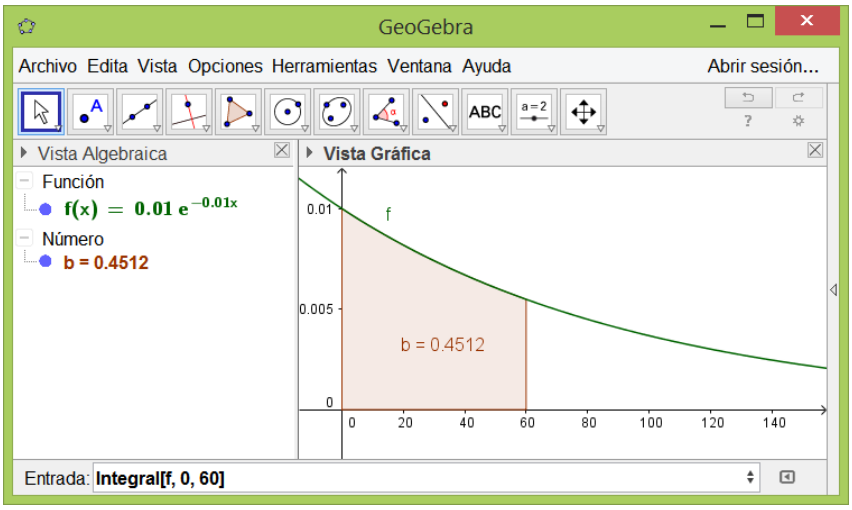


Figura 5.5: Solución parte b)

Expresando el resultado en porcentaje se tiene 45,12 % en consecuencia se concluye indicando que el 45,12 % de bombillas fabricadas tendrán una duración menor o igual a 60 horas.

- **Parte c)** Para la solución de la tercera parte consideramos la siguiente probabilidad $P[x > 60] = \int_{60}^{+\infty} f(x)dx$, reemplazando la función de densidad se tiene: $P[x > 60] = \int_{60}^{+\infty} 0,01e^{-0,01x}dx$ para la solución ingresamos la función al programa GeoGebra **`y=0.01*e^(-0.01*x)`** y utilizando el comando **`Integral[f, 60, ∞ ]`** se tiene:

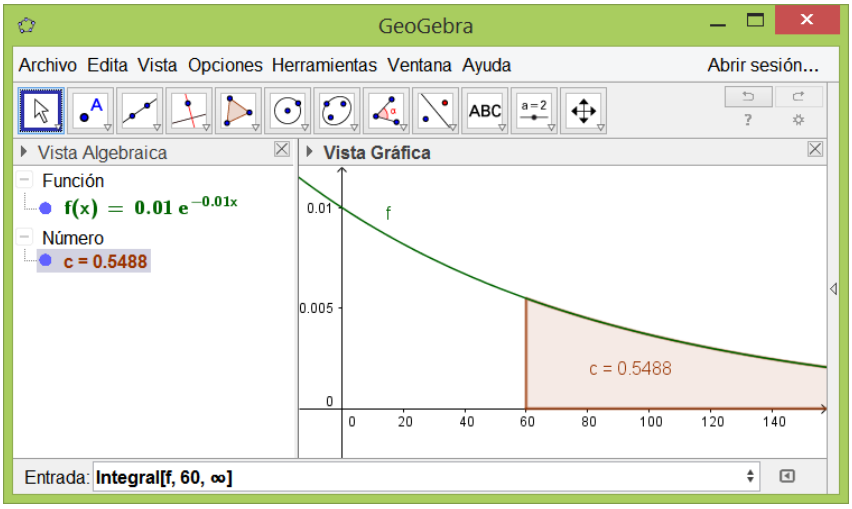


Figura 5.6: Solución parte c)

Expresando el resultado en porcentaje se tiene; 54,88 % en consecuencia se concluye indicando que el 55,88 % de bombillas fabricadas tendrán una duración mayor a 60 horas.

5.5 Aplicación a las ganancias netas

Según la Real Academia Española define de la siguiente manera:

Definición 5.5 Ganancia

1. f. Acción y efecto de ganar.
2. f. Utilidad que resulta del trato, del comercio o de otra acción.

(RAE 2016).

En términos administrativos o económicos tenemos:

Concepto de utilidad o ganancia

La utilidad de un consumidor es una medida de la satisfacción que el consumidor obtiene del consumo de bienes y servicios.

Fuente: (Krugman Paúl R. Fundamentos de economía 2008).

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3

Suponga que cuando tiene x años, cierta máquina industrial genera ingresos a la razón de $R(x) = 6025 - 8x^2$ soles por año y origina costos que se acumulan a la razón de $C(x) = 4681 + 13x^2$ soles por año. ¿Cuáles son las ganancias netas generadas por la maquinaria durante su periodo de rentabilidad?

Solución:

La ganancia esta dado por $G(x) = R(x) - C(x)$ en consecuencia para los próximos 8 años de ganancia se tiene: $G(x) = \int_0^8 R(x) - C(x)dx$, para encontrar el resultado utilicemos el programa GeoGebra y los pasos a seguir son:

- Ingresamos las funciones ingreso $R(x) = 6025 - 8x^2$ y costo $C(x) = 4681 + 13x^2$, con los siguientes comandos `R(x)=6025-8*x^2` y `C(x)=4681+13*x^2`.

- Luego determinemos cuál será el tiempo de rentabilidad, la rentabilidad se obtiene cuando $R(x) = C(x)$ para resolver ésta ecuación nos dirigimos al menú **Vista** del programa GeoGebra y elegimos el sub menú **Cálculo Simbólico (CAS)**, luego ingresamos el comando `R(x)=C(x)`, a continuación hacemos clic en el ícono  como se muestra en la figura adjunta, en donde el resultado es -8 y 8 años, de lo cual tomamos el tiempo positivo.

- Para determinar la integral de la diferencia, previamente ingresamos $G(x) = R(x) - C(x)$, mediante el comando `G(x)=R(x)-C(x)`. Luego ingresamos el siguiente comando `Integral[G(x), 0, 8]`, se considera de cero a ocho, puesto que la rentabilidad se obtiene hasta los 8 años según el resultado del item anterior.

- Por consiguiente según la gráfica que se muestra, las ganancias netas generadas por la maquinaria durante 8 años es 7168 soles.

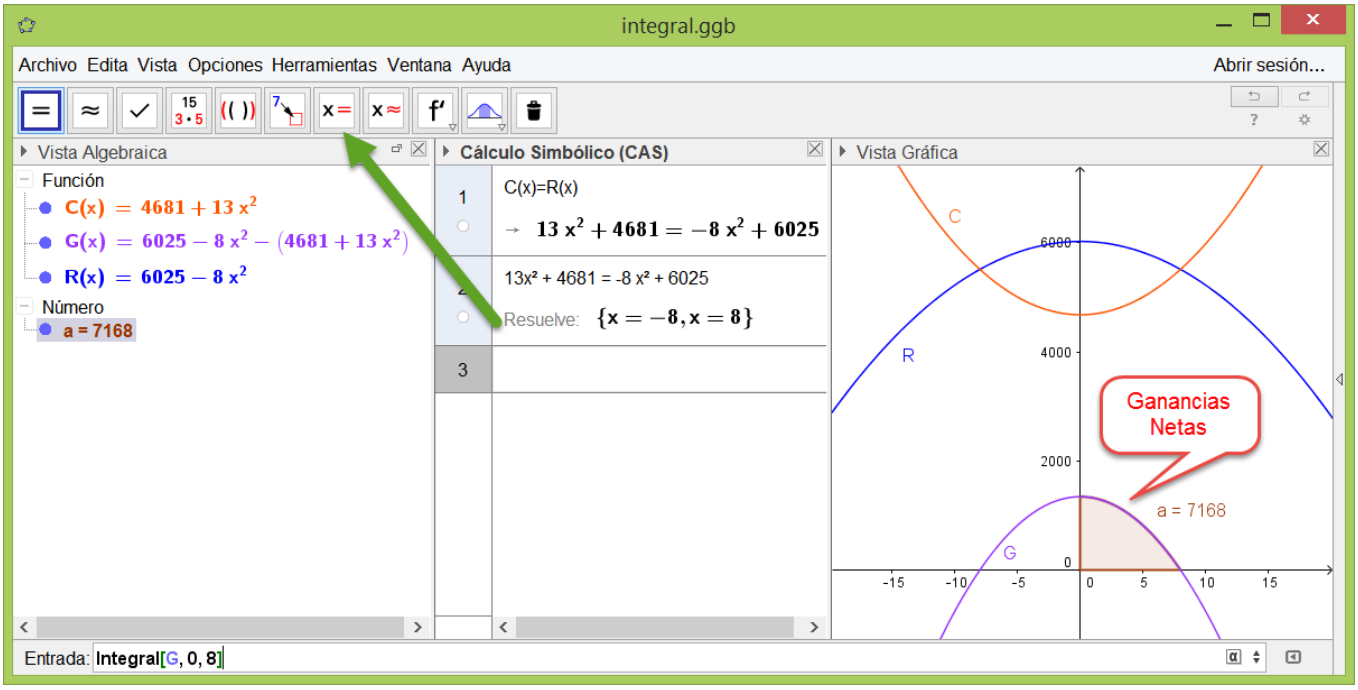


Figura 5.7: Ganancias netas - Resultado GeoGebra

5.6 Aplicación sobre el excedente total

El excedente es un beneficio que se obtiene de un mercado, tanto el consumidor como el productor, a este beneficio del consumidor y del productor se le conoce como excedente del consumidor y del productor, el excedente del consumidor relacionado con la ecuación de demanda en la cual a medida que crece el precio la demanda decrece y por otro lado el excedente del productor relacionado con la ecuación de oferta. La intersección de la curva de oferta y demanda viene a ser el punto de equilibrio (q_0, p_0), donde p_0 es el precio con el que los consumidores comprarán la cantidad q_0 de un producto que los productores venderán. La recta paralela al eje de producción que pasa por el punto de equilibrio divide en dos regiones los cuales son llamados excedentes del consumidor y del productor, a esta suma se le conoce como excedente total generado en un mercado.

A continuación tenemos los siguientes conceptos:

Excedente del consumidor

La integral $\int_0^{q_0} (p - p_0)dq$, bajo ciertas condiciones, representa la ganancia total de los consumidores que están dispuesto a pagar más que el precio de equilibrio. Esta ganancia total se llama **excedente de los consumidores** y se abrevia como **EC**. Si la función de demanda está dada por $p = f(q)$, entonces:

$$EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]dq$$

Fuente: (Haeussler, F., Ernest Jr. (2003)).

Excedente del productor

Algunos productores también se benefician del precio de equilibrio, ya que están dispuestos a suministrar el producto a precios menores que p_0. Bajo ciertas condiciones, la ganancia total de los productores es llamada **excedente de los productores**, y abreviada **EP**, está dada por:

$$EP = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]dq$$

Fuente: (Haeussler, F., Ernest Jr. (2003)).

Los conceptos anteriores se entenderán mejor mediante las siguientes gráficas que a continuación se presentan:

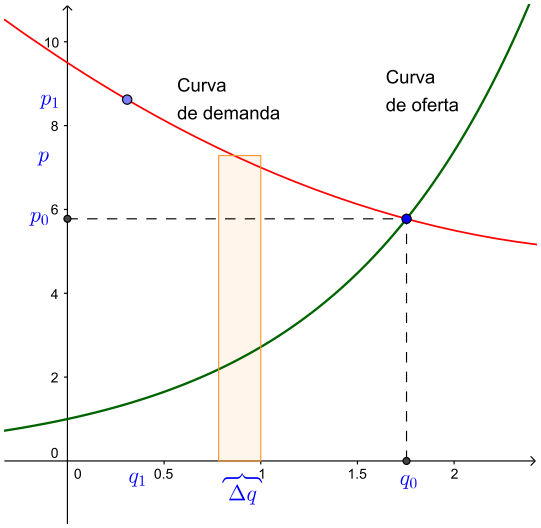


Figura 5.8: Curva de oferta y demanda

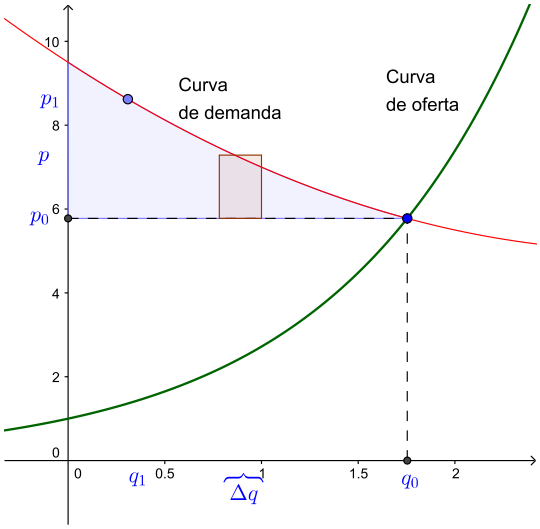


Figura 5.9: Beneficio del consumidor por Δq unidades

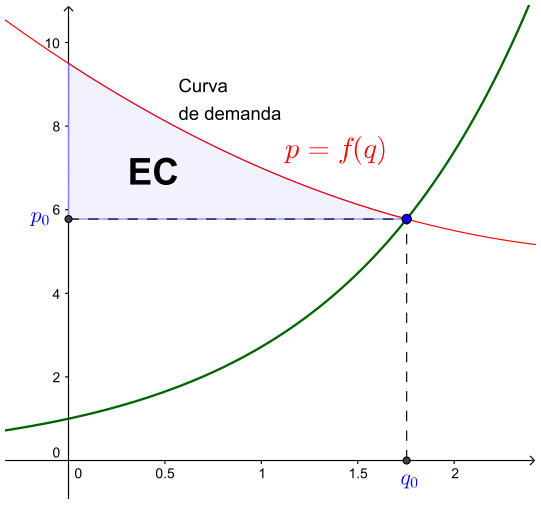


Figura 5.10: Excedente de los consumidores

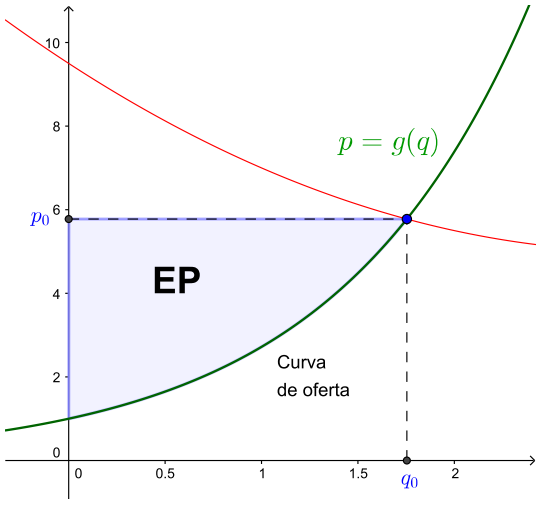


Figura 5.11: Excedente de los productores

Ejemplo 5.4

Si la curva de demanda está dada por $p = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 30$ y la curva de oferta por $p = 3x + 16$, encontrar el excedente del consumidor y el excedente del productor.

Solución:

Para resolver el problema consideremos los siguientes pasos:

Primer Paso: Abrimos el programa GeoGebra e ingresamos las funciones de Oferta y Demanda mediante los siguientes comandos; para la ecuación de demanda, `D(x)=(-1/2)*x^2-3*x+30`, para la ecuación de oferta `O(x)=3*x+16`, el cual se tendrá como se muestra en la figura adjunta:

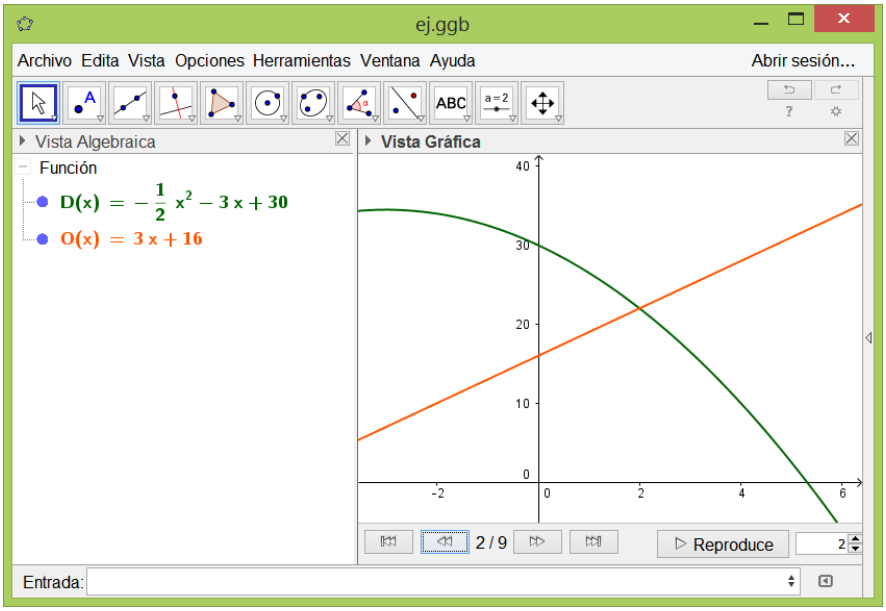


Figura 5.12: Curvas de Oferta y Demanda

Segundo paso: De la barra de herramientas elegimos la herramienta intersección y luego hacemos clic en la intersección de las funciones de oferta y demanda, el resultado será el punto de equilibrio $(q_0, p_0) = (2, 22)$, así como se muestra en la gráfica adjunta:

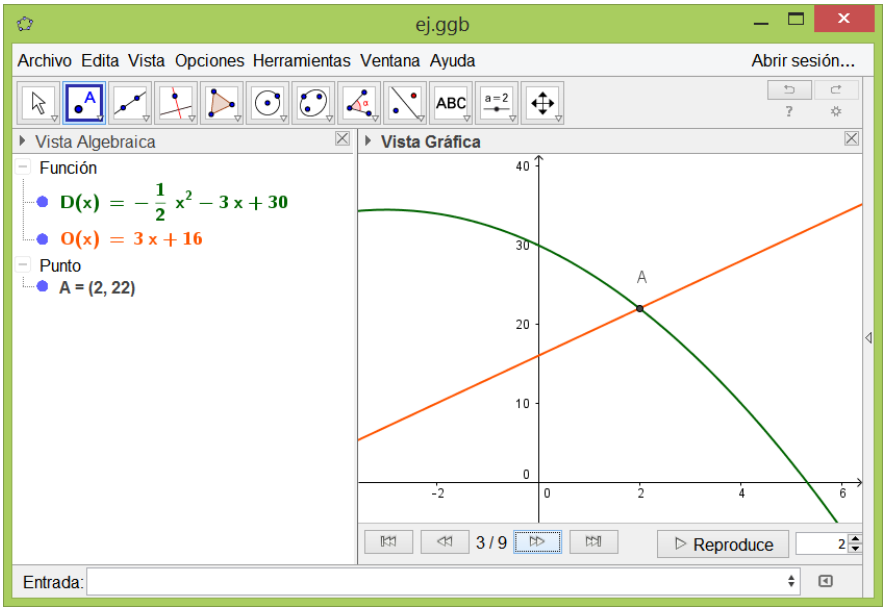


Figura 5.13: Punto de equilibrio de la oferta y demanda

Tercer paso: Trazamos una recta perpendicular al eje vertical utilizando la herramienta perpendicular de la barra de herramientas, luego se tiene la gráfica adjunta:

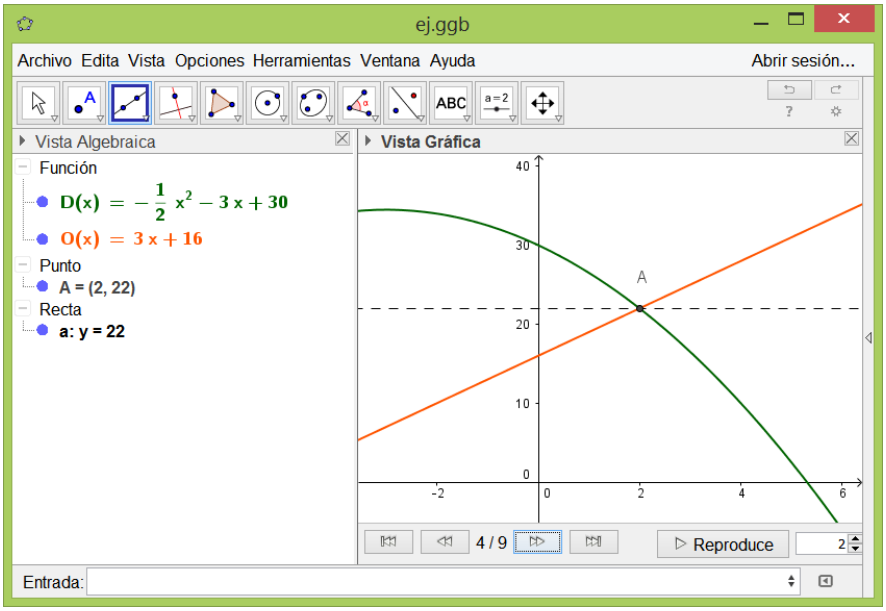


Figura 5.14: Punto de equilibrio de la oferta y demanda

Para el siguiente paso es necesario indicar que lo que se requiere determinar es el área entre la curva de demanda y la curva horizontal trazada anteriormente, así también se puede apreciar en la fórmula de integración del EC.

Cuarto paso: Para el excedente del consumidor ingresamos el siguiente comando `IntegralEntre[D,a,0,2]`, cuyo resultado es 8,67 soles así se muestra en la gráfica adjunta:

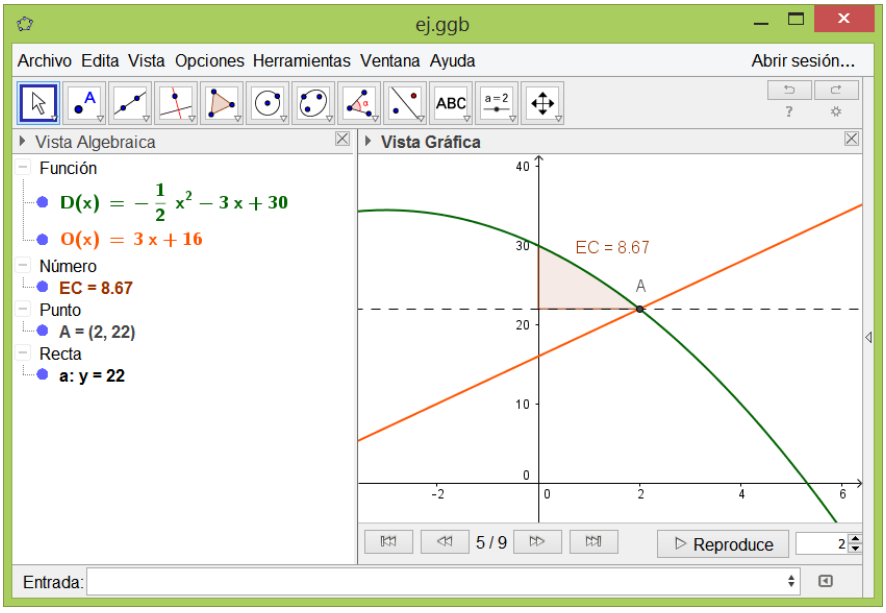


Figura 5.15: Excedente del consumidor

Análogamente para realizar el siguiente paso es necesario considerar el área entre la recta horizontal trazada anteriormente y la curva de oferta y aplicar la integral según la fórmula para el EP.

Quinto paso: Para el excedente del productor ingresamos el siguiente comando `IntegralEntre[a,O,0,2]`, cuyo resultado es 6 soles así se muestra en la gráfica adjunta:

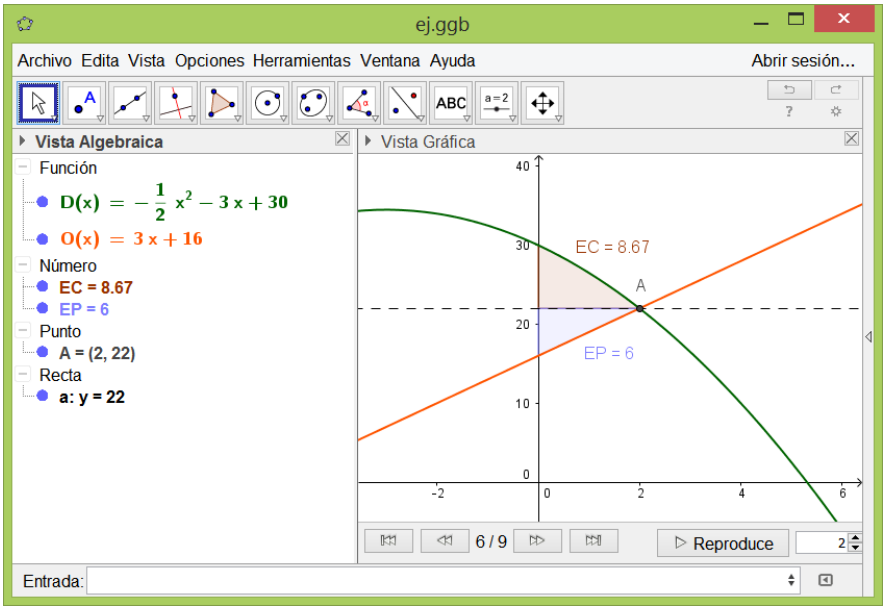


Figura 5.16: Excedente del productor

Sexto paso: El presente paso es simplemente para realizar algunas decoraciones de texto al resultado final, con lo cual se da respuesta al ejemplo planteado, como se puede apreciar en la figura adjunta:

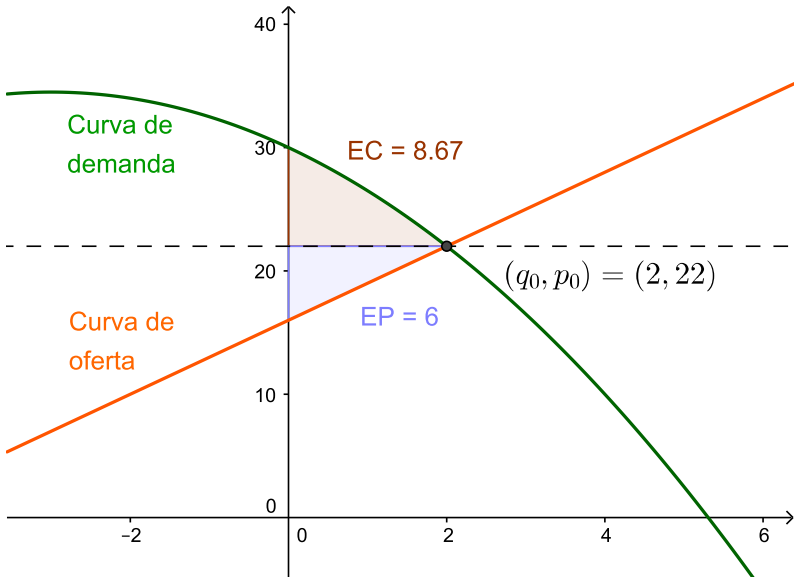
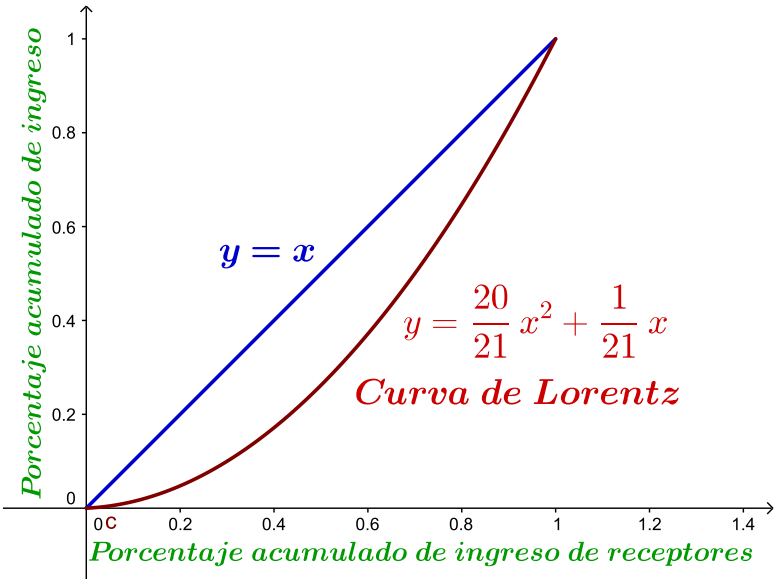


Figura 5.17: Resultado final

5.7 Aplicación del coeficiente de desigualdad para distribuciones de ingreso

Curva de Lorentz

Sea $y = f(x)$ una función donde y está considerado como la proporción de ingreso de una población, y x representa la proporción de captadores de ingresos cuyos ingresos son mínimos, ésta curva que describe el ingreso de una población es denominada **curva de Lorentz** cuya característica importante es la variación entre 0 y 1, es decir $0 \leq f(x) \leq 1$, ésta variación se considera puesto que el ingreso tendrá variación de 0 a 100 %. La representación gráfica de la curva de Lorentz se muestra a continuación:



Fuente: (Haeussler, F., Ernest Jr. (2003)).

Figura 5.18: Curva de Lorentz

El grado de desviación de la igualdad se mide mediante el **coeficiente de Gini** ideada por el estadístico Corrado Gini, llamado también coeficiente de desigualdad para la curva de Lorentz del gráfico **(5.18)**, éste coeficiente esta definido como el área entre la recta $y = x$ y la curva de Lorentz, dividido entre el área bajo la recta $y = x$, es decir:

$$\text{Gini} = \frac{\text{Área entre la curva de Lorentz y la recta } y = x}{\text{Área bajo la recta } y = x}$$

En el coeficiente planteado el área bajo la recta $y = x$ es igual a $\frac{1}{2}$, por otro lado sea $y = f(x)$ la curva de Lorentz en consecuencia el área limitada por la recta $y = x$ y la curva de lorentz $y = f(x)$ la podemos expresar mediante una integral, con estos considerandos tenemos:

$$G = \frac{1}{2}\int_0^1 [x - f(x)]dx \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.5

La distribución de ingreso de un país está descrita por la curva de Lorentz $y = 0{,}94x^2 + 0{,}06x$, en donde **x** es la proporción de captadores de ingreso y **y** es la proporción de ingreso total recibida.

a) ¿Qué proporción recibe el 20 % de la gente más pobre?

b) Determine el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz

Solución:

Veamos la solución mediante el programa wxMaxima según los siguientes pasos:

1. Ingresamos la función $f(x) = x$ que viene a ser la recta, mediante el comando **`f(x):=x$`**.

2. Análogamente la función $l(x) = 0{,}94x^2 + 0{,}06x$ ecuación de la curva de Lorentz, mediante el comando **`l(x):=0.94*x^2+0.06*x$`**.

3. Parte a) Remplazamos $20\% = 0{,}2$ en la ecuación de la curva de Lorentz, es decir; $l(0{,}2)$ mediante el comando **`l(0.2)`**, resultando $0{,}0496 = 4{,}96\%$, que es el porcentaje del ingreso total que perciben el 20% de la gente más pobre.

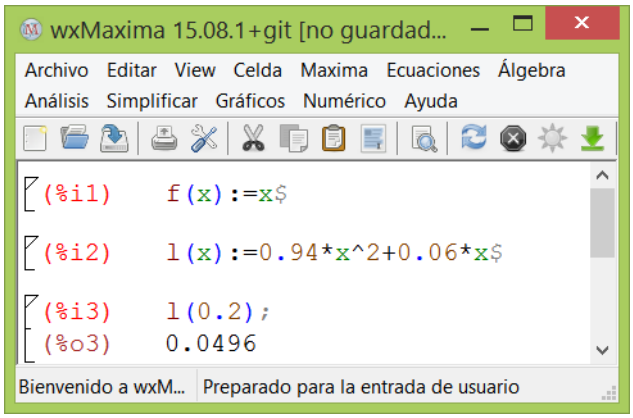


Figura 5.19: Resultado parte a)

4. Nos dirigimos al menú **`Análisis>Integrar`**, y luego ingresamos la función en este caso será una diferencia de funciones **`f(x)-l(x)`**, definida de 0 a 1, cuyo resultado es $\frac{47}{300}$.

5. Dando clic derecho a la fracción o a la etiqueta de salida elegimos **A real**, con lo cual obtenemos 0,156.

6. En la ecuación **(5.3)** el coeficiente es el doble de la integral determinada, entonces multiplicamos por 2 ingresando `%*2`, se obtiene 0,3133, que es el coeficiente de desigualdad, dando respuesta al ejemplo planteado.

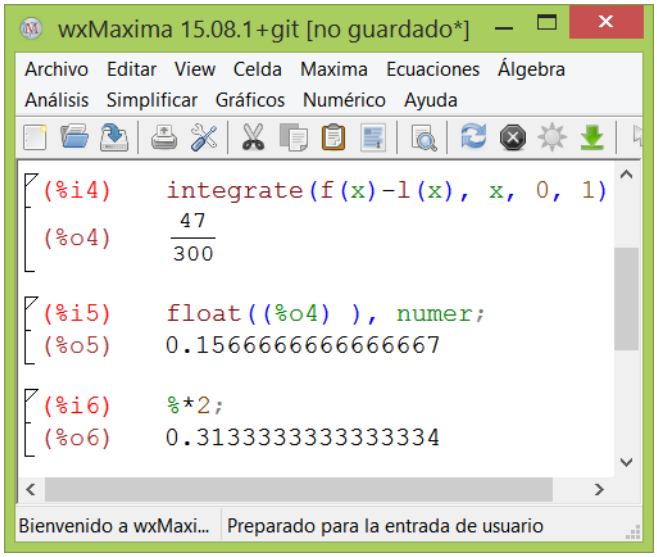


Figura 5.20: Resultado parte b)

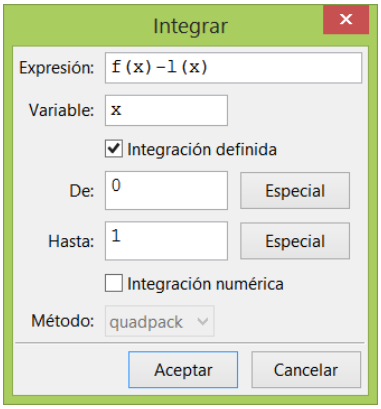


Figura 5.21: Menú integración definida

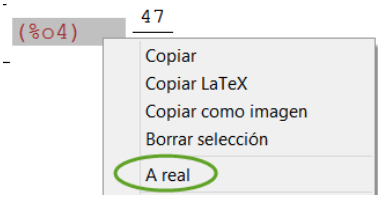


Figura 5.22: Conversión expresión fraccionaria a real

Para obtener la representación gráfica en el programa wxMaxima, se tiene los siguientes pasos:

1. Cargar el paquete draw.
2. Ingresar los comandos como funciones a considerar, colores de las curvas y escala del gráfico.

Los comandos a seguir se muestra a continuación:

```
(%i1) load(draw);

(%i2) f(x):=x\$
      l(x):=0.94*x^2+0.06*x\$
      [x1,x2]: map('rhs, solve(f(x)=l(x)));
      draw2d(title = "Área entre la Curva de Lorentz y la recta y=x",
      fill\_color = orange,filled\_func = l(x),explicit(f(x),x,x1,x2),
      filled\_func = false,xaxis = true,xtics\_axis = true,
      yaxis = true,line\_width = 2,key = string(f(x)),color = blue,
      explicit(f(x),x,0,1.2),key = string(l(x)),color = black,
      explicit(l(x),x,0,1.2));

(%i2) [0,1]
```

La gráfica que se obtiene se muestra a continuación:

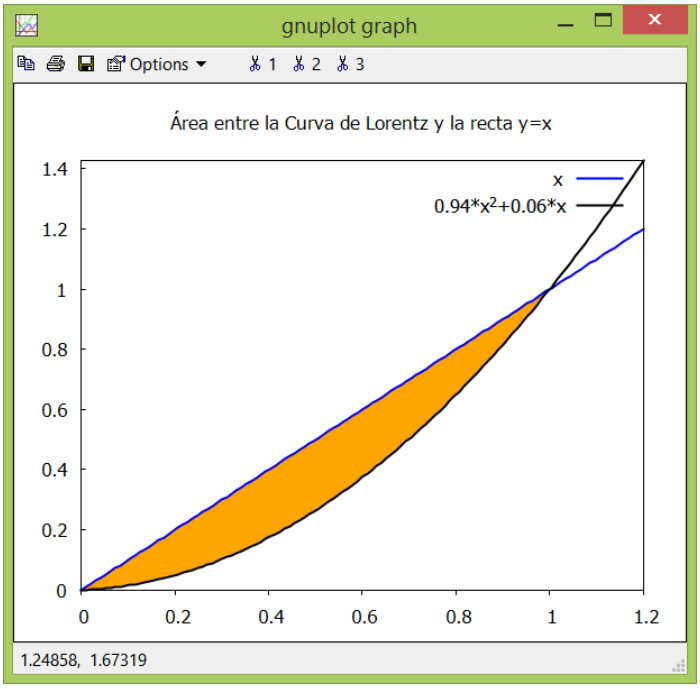


Figura 5.23: Función de Lorentz - ejemplo

5.8 Aplicación sobre la curva de aprendizaje

Según Latiff A. (2005). El concepto de "**curva de aprendizaje**" fue introducido originalmente en la fabricación de aviones en 1936, por TP Wright, quien describió una teoría básica para evaluar la producción

repetitiva en ensamblajes de aeronaves. Desde entonces, el concepto ha sido utilizado en muchos campos además de la medicina.
A continuación se presenta un concepto en la que involucra la función de la curva de aprendizaje que es nuestro interes para la posterior aplicación de problemas.

Curva de Aprendizaje

En producción industrial, la administración a menudo debe estimar de antemano el número total de horas-hombre que requerirá con la finalidad producir un número determinado de unidades de su producto. Por ejemplo, esto se requiere para establecer el precio de venta, la fecha de entrega o la concertación de un contrato. Una herramienta que con frecuencia se utiliza para tal predicción se denomina curva de aprendizaje. La función que por lo regular se utiliza en tal situación es de la forma:

$$\mathbf{f(x) = ax^b}$$

en donde a y b son constantes con $a > 0$ y $-1 \leq b < 0$. La elección de ax^b con $-1 \leq b < 0$, asegura que el tiempo requerido por unidad disminuye a medida que se producen más y más unidades. La gráfica de $f(x)$ se denomina una curva de aprendizaje. En la práctica, las constantes a y b se determinarían con base en series de producción preliminar o por experiencias con productos similares.

(Jagdish C. Arya/Robin W. Lardner 2009).

Representación gráfica de la función denominada curva de aprendizaje

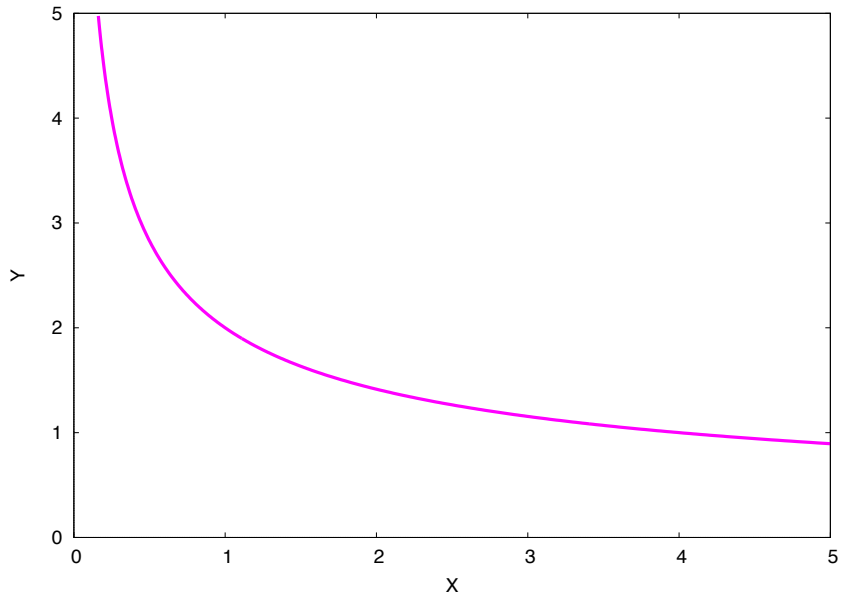


Figura 5.24: Curva de aprendizaje

Ejemplo 5.6

Después de pintar los primeros 40 automóviles un establecimiento de pintado de automóviles estima que la curva de aprendizaje es de la forma $f(x) = 10x^{-0,25}$, encuentre el número total de horas-hombre que se requerirán a fin de pintar 60 automóviles más.

Solución:

Como se tiene que pintar 60 automóviles más entonces se tendrá la variación de tiempo $\Delta T = \int_c^d f(x)dx$, donde $c = 40$ y $d = 100$, por consiguiente se debe resolver la integral $\Delta T = \int_{40}^{60} 10x^{-0,25}dx$, utilizando el wxMaxima se tiene:

1. Ingresamos la función o curva de aprendizaje $f(x) = 10x^{-0,25} = 10x^{-1/4}$ mediante el comando **`f:10*x^(-1/4)`**.
2. Ingresando al menú Análisis elegimos la opción Integrar.
3. Por defecto la ventana emergente nos mostrara la expresión **%**, que significa que considera la función anterior a integrar, luego consideramos el chec en **Integración definida** y consideramos los límites de integración de 40 a 100 según el análisis del problema y luego hacemos clic en **Aceptar**.
4. El resultado nos mostrará la expresión sin simplificar, el cual para tener un resultado real hacemos clic derecho en el resultado **%o2**, o en su defecto seleccionamos el resultado, y elegimos **A real** del menú emergente, con lo que obtenemos 209,564.
5. Con lo que podemos decir que el número de horas-hombre que se requieren para pintar 60 automóviles más es de 210 horas aproximadamente.

Los desarrollos mediante el software se muestra a continuación:

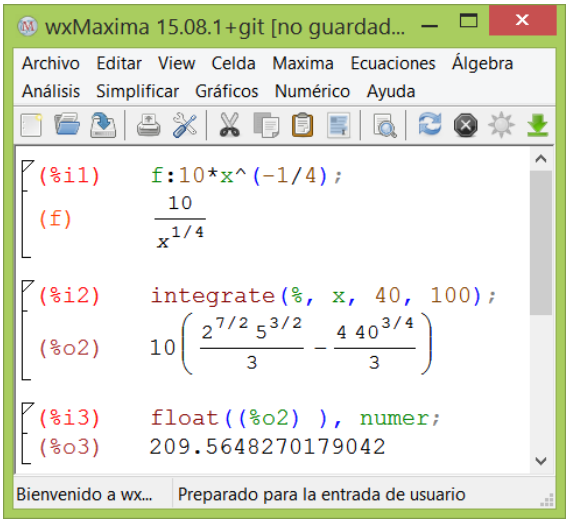


Figura 5.25: Resultado de la integral de la curva de aprendizaje

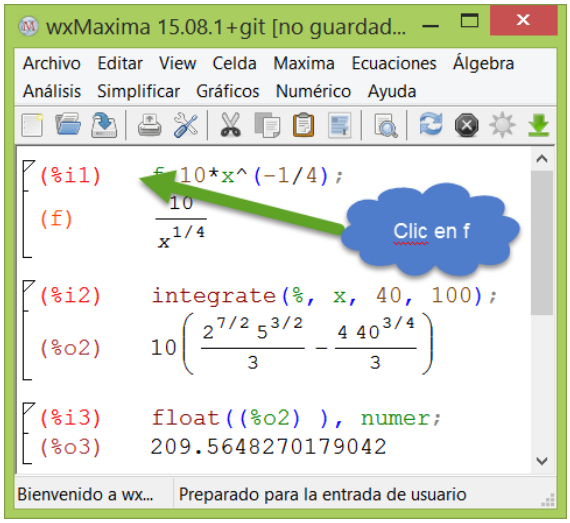


Figura 5.26: Proceso de selección para la integración

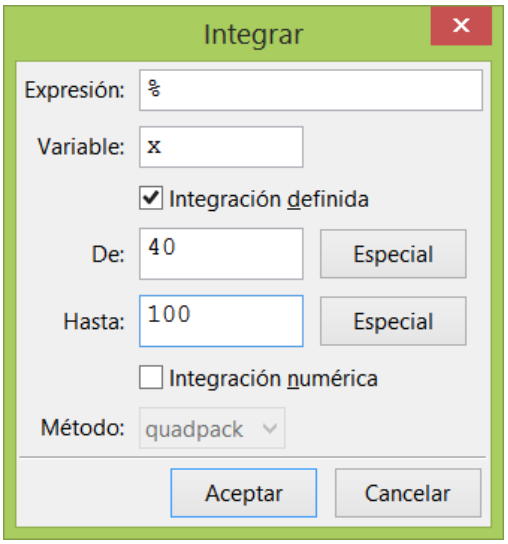


Figura 5.27: Opciones de integración



Figura 5.28: Obciones para la representación gráfica

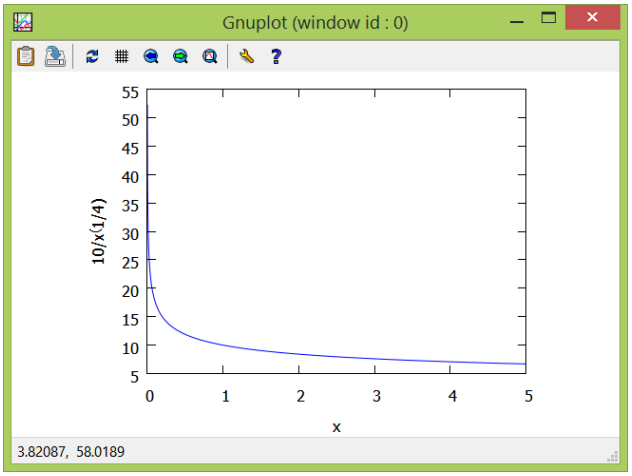


Figura 5.29: Curva de aprendizaje

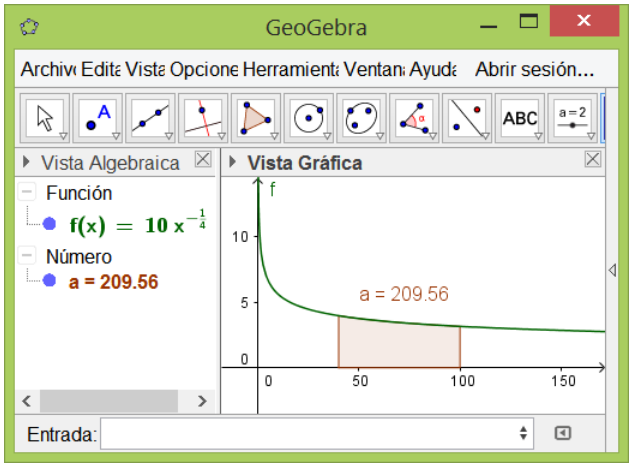


Figura 5.30: Curva de aprendizaje y área en GeoGebra

5.9 Aplicación sobre maximización de la utilidad

La utilidad esta considerado como un beneficio que se persigue el cual al ser maximizado es rentable, según el diccionario digital de la Real Academia Española está definida como:

> Del lat. utilitas, -*ā*tis.
> 1. f. Cualidad de útil[1].
> 2. f. Provecho, conveniencia, interés o fruto que se saca de algo.
> (RAE 2016).

Desde luego que este provecho o beneficio propiamente dicho utilidad está en función del ingreso de un negocio y el costo del producto con el cual se adquiere, es decir nos referimos a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}(\mathbf{x})$$

Donde:
$\mathbf{U}(\mathbf{x})$ es la utilidad
$\mathbf{I}(\mathbf{x})$ es el ingreso
$\mathbf{C}(\mathbf{x})$ es el costo
Estas tres cantidades están relacionadas con sus respectivos marginales o tasas de cambio, al respecto Ernest F. Haeussler considera en su libro como objetivo:
Es explicar la tasa instantánea de cambio de una función por medio de la velocidad e interpretar la derivada como una tasa instantánea de cambio. Desarrollar el concepto "marginal", que se utiliza con frecuencia en administración y economía.
A su vez conceptualiza como:

Costo marginal

La función de costo total de un fabricante, $C = f(q)$, nos da el costo total C de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de C con respecto a q se llama costo marginal. Así,

$$C' = \frac{dC}{dq} \tag{5.4}$$

donde C: es costo y q: producción

Fuente: (Haeussler, F., Ernest Jr. (2003)).

Análogamente podemos decir lo siguiente:
$\mathbf{U}'(\mathbf{x})$ es la utilidad marginal o tasa de la utilidad marginal
$\mathbf{I}'(\mathbf{x})$ es el ingreso marginal o tasa de ingreso marginal
$\mathbf{C}'(\mathbf{x})$ es el costo marginal o tasa de costo marginal

Ejemplo 5.7

Las tasas de ingreso y costo en una operación de perforación petrolera están dadas por: $R'(t) = 14 - t^{\frac{1}{2}}$, $C'(t) = 2 + 3t^{\frac{1}{2}}$ respectivamente, en donde el tiempo t se mide en años, R y C se miden en millones de soles. ¿Cuánto deberá prolongarse la perforación a fin de obtener la utilidad máxima, cuál es esta utilidad?

Solución:
Considerando la utilidad $U(t) = R(t) - C(t)$, donde $U(t)$ esta en millones de soles, también tenemos $U'(t) = R'(t) - C'(t)$, en el cual para obtener la utilidad máxima $U'(t) = 0$, con la ayuda del software wxMaxima tenemos:

1. Puesto que $U'(t) = 0$, el cual maximiza la utilidad, entonces $R'(t) = C'(t)$, entonces $14 - t^{\frac{1}{2}} = 2 + 3t^{\frac{1}{2}}$, esta función ingresamos al programa.
2. Ingresamos al menú **Ecuaciones >Resolver**, así obtenemos $t = 9$.
3. En consecuencia la operación de perforación petrolera se desarrollará durante 9 años.

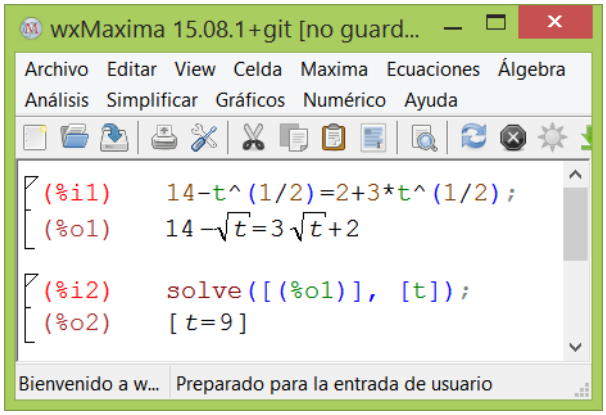


Figura 5.31: Maximización de la utilidad

Por tanto la utilidad en el periodo de nueve años estará dada por:

$$U = \int_0^9 (14 - t^{\frac{1}{2}}) - (2 + 3t^{\frac{1}{2}})dt$$

Integrando en el software se tiene:

1. Ingresamos la función a integrar $U = (14 - t^{\frac{1}{2}}) - (2 + 3t^{\frac{1}{2}})$, mediante el comando `U(t):=(14-t^(1/2))-(2+3*t^(1/2))`
2. Ingresamos al menú **Análisis >Integrar**.
3. Ingresamos la función $U(t)$, aplicamos la integral definida de 0 a 9. Resultando 36
4. En consecuencia podemos indicar que la utilidad máxima que se obtiene en el periodo de nueve años es de 36 millones de soles.

Los procedimientos indicados en el programa se adjunta a continuación.

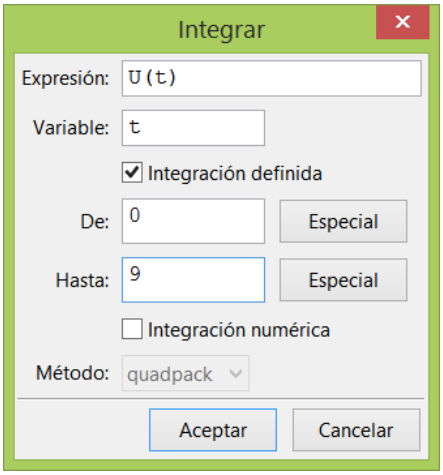


Figura 5.32: Integración definida

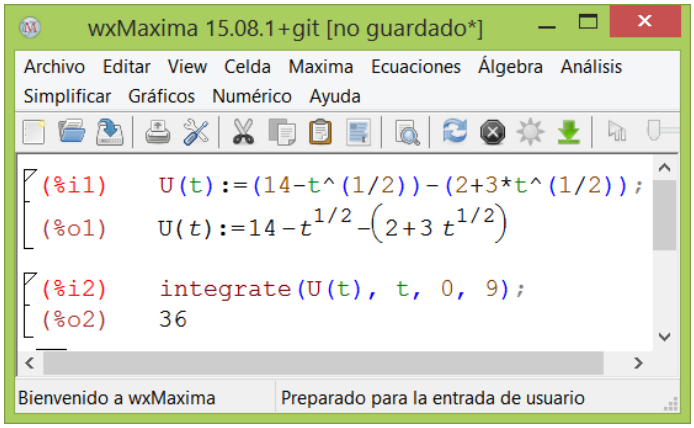


Figura 5.33: Utilidad máxima

De esta manera se da por resuelto el problema planteado, obteniéndose el tiempo de perforación y su respectiva utilidad máxima.

Bibliografía

Alaminos Prats, J. (2014). *Practicas de ordenador con wxmaxima*. España: Universidad de Granada.

Apostol, T. M. (2001). *Calculus, one-variable calculus, with a introduction to linear algebra*. Barcelona España: Reverté.

Arce Carrasco, A. (2006). *Cálculo diferencial e integral y matemática básica: sus aplicaciones*. Cusco - Perú: Pozo.

Arya, J. C., y Lardner, R. W. (1992). *Matemáticas aplicadas a la administración, economía, ciencias biológicas y sociales*. México: Prentice Hall.

Arya, J. C., y Lardner, R. W. (2002). *Matemáticas aplicadas: a la administración ya la economía*. Pearson Educación.

Borbón A., A. (2010). *Manual para geogebra*. Costa Rica: Instituto Tecnológico.

Borbón A., A., y Mora Flores, W. (2014). *Edición de textos científicos latex*. Costa Rica: Instituto Tecnológico.

Budnick, F. S., y cols. (1990). *Matemática aplicada a la administración y economía*.

Edwar T., D. (1999). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*. Bogotá Colombia: McGRAW-HILL.

Haeussler F., E. J. (2003). *Matemáticas para administración y economía*. México: Pearson.

Krugman Paúl Robin Wells, M. L. O. (2008). *Fundamentos de economía*. Barcelona: Reverté.

Leithold, L. (1998). *El cálculo(7a ed)*. Ed. Mexicana.

Ángel G. Julio. (2007). *Estadística general aplicada*. Medellín Colombia: Fondo Editorial Universidad EAFIT.

Pozniak, E., y Llín, V. (1991). *Fundamentos de análisis matemático*. Moscú: MIR.

Purcel, E. J., Varberg, D., y Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo*. México: Pearson.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. México D.F.: Reverté.

Stewart, J. (2001). *Cálculo*. Barcelona España: Thomsom.

Thomas, G. B. (2005). *Cálculo: una variable* (Vol. 1). Pearson Educación.

Thomas M. Little, F. J. H. (2002). *Métodos estadísticos para la investigación en la agricultura*. México: Trillas.

Colloquium
Editorial - Centro de Formación